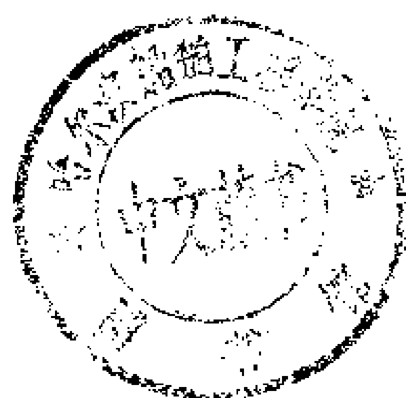
广义函数论

主编　刘浩岳

编者　刘　刚　刘志毅　崔光云

边文明　张京玲　许祖芳







河南大学出版社

(豫)新登字09号

广义函数论
主　　编　刘浩岳
责任编辑　程　庆

河南大学出版社出版
(开封市明伦街85号)
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：11.25　字数：282千字
1995年8月第1版　1995年8月第1次印刷
印数：1—1000　定价：8.00元

ISBN7-81041-229-9/O·70

前　言

广义函数论是本世纪50年代形成的一门重要的数学分支.40年来,由于近代物理学、工程技术科学和数学本身的需要,它获得了迅猛发展.国外已出版一些专著.国内也有些高等院校在泛函分析课程中程度不同地讲授了一些初等知识.1985年在青岛举行的全国第一届“广义函数及其应用”会议标志着我国数学界对广义函数的重视.我国已规定广义函数为基础数学专业研究生的必修内容,但是至今还没有一本符合我国国情的自编教材.

编者有幸多次为研究生和青年教师讲授广义函数论及有关课程,本书就是在原来讲义的基础上补充修订而成的.全书系统介绍广义函数论的研究对象、基本理论、思想和研究方法,以及一些近期发展情况.选材时既考虑到理论的系统性和科学性,也考虑到内容的全面性和方向性.本书可作为高等院校的教材,也可作为工程技术人员和科研工作者学习与研究泛函分析知识的参考书.

本书在编写过程中注意到下列几点:

(1) 全书自成体系.本书开始先介绍阅读本书所需的基础知识,而不计细节.书后附有主要的经典著作和近期的一些参考文献,以便于读者自学和研究.

(2) 每章开始,先概述本章主要内容,使读者有个概括了解,以便有目的、有选择地阅读和参考.

(3) 对基本概念的引入,尽可能指出其背景材料,避免给人

以“无源之水，无本之木”的感觉.

（4） 重要定理的证明务求思路明确，叙述详尽，以方便教学.

（5） 结合本书内容，指出广义函数论中存在的一些问题、发展方向以及参考文献，供有志于本专业的读者参考.

在编写过程中，我们试图兼顾入门和专著两个方面，但限于水平，有时难免失于偏颇，也会出现一些缺点和错误，敬请广大读者指正，以便修改.

编写本书时，得到了河南师范大学校、系领导的关怀与支持．寇怀忠同志对本书提出过许多有益的建议，王向东同志及系中许多教师都帮忙做了许多工作．河南省教委、河南大学出版社的领导及有关同志对本书出版给予大力支持，特别是程庆同志为本书编辑出版付出了辛勤的劳动，我们表示衷心的感谢.

编者

1995年2月

引言——广义函数论的形成和发展

广义函数论是在近代物理学、工程技术科学与数学本身理论发展的基础上逐渐形成和发展起来的，是泛函分析的一个重要分支.

19 世纪 30 年代，经过约 200 年争论之后，由于自然科学的发展，大量具体材料的积累，特别是由于弦振动问题的研究，当人们提出了函数用三角级数表示的可能性问题后，函数概念终于从连续性、可微性与展成幂级数的可能性中分离出来. 如所周知，这个定义是："函数 $y=f(x)$ 是一个对应规则，对于 x 的变化域内的每个数值，按照这个规则，有 y 的某个数值与之对应."现在也有人称这个定义为函数的古典定义，它大致符合关于测量和计算宏观物体运动的结果. 人们用这个定义成功地解决了当时遇到的数学方面与物理方面的主要困难，以致争论各方完全一致地接受了这个定义. 可以说，在 19 世纪和 20 世纪初叶，数学分析的整个进一步发展，实质上是遵循这个定义的可能展开的方向前进的.

但是自 20 世纪初，进入微观物理现象的研究后，函数的古典定义不再被认为那样完美了，人们希望它有所改进. 这种要求主要来自以下两个方面：

(1) 物理学与工程技术科学的进一步研究遇到了重大困难. 例如在量子力学的研究中以狄拉克(Dirac)为名的"δ 函数"(注：事实上，此"函数"早已在物理学与工程技术科学中应用了. 狄拉

克只是广泛应用了它，这一点已有多人指出，如吕澄(Lutzen)[1]），此"函数"在 x 轴上除去一点外处处为零，在这一点的值为无限大，而其积分值却等于 1．从古典的函数与积分的观点看来，这个"函数"包含着不可克服的矛盾，但这个"函数"甚至它的各阶"导函数"，不仅可以在现实世界找到原型，而且也在物理学与工程技术科学中得到了广泛应用，成了物理学家与工程技术专家得心应手的工具．还有，对古典函数的某些运算(如求导函数或函数列的逐项求导)往往要加上很强的条件，但在许多问题中，这些条件或者不具备，或者虽然具备而验证起来却很麻烦．物理学家与工程技术专家希望摆脱这些条件来考虑，而数学家则要以这些条件作为施行各种运算的前提．那些必要而严格的但却是繁琐的条件，大大限制了数学分析方法的灵活运用．在电工学中经常运用没有严格数学基础的由海维赛德 (Heaviside) 工程师引进的运算微积方法．当时的工程师们都系统地应用了他的概念，同时或多或少地意识到，这将成为一门专门的学问——"不精确但却很成功的学问"．这些乍看起来很不严格的似乎没有可靠理论根据的概念与方法，其所以用之有效，自然是由于它们反映了物质世界的客观规律．这就充分说明古典的函数概念是不完备的．

(2) 数学理论的发展也产生了新的需要．偏微分方程广义解的研究与发散积分概念的引入就是明显的例子．众所周知，斯蒂尔吉斯(Stieltjes)积分理论可以给出"δ 函数"以合理的解释，但那些对象所固有的直观性与运算的灵活性却被掩蔽，并且"δ 函数"的"导函数"就不能用这种积分表示．同样地，拉普拉斯(Laplace)变换理论也能给运算微积以严格基础，从而使它成为可靠的数学工具，但同时它也失去了本来的灵活特点，还带来了一定的解析局限性，使其应用范围受到限制．因此，本质问题在于需要适当推广古典的函数概念及其运算，在更高的基础上恢复数学分析的灵活

[1]见参考文献 44．

性，使它成为更合理、更一般的数学工具，以便能在更完备的抽象程度上表达和研究物质世界．广义函数论在一定程度上令人满意地解决了这些问题．

在广义函数论形成过程中，阿达玛（Hadamard）与黎斯（Riesz）关于发散积分的工作曾起过重大作用．另一方面，按幂式增长函数的傅里叶（Fourier）变换的博赫纳（Bochner）理论与广义函数理论也有紧密的联系．这些傅里叶变换实质上就是广义函数．在博赫纳理论中，它们是当作连续函数的形式上的导数而出现的．索伯列夫（Соболев）在研究变系数双曲型偏微分方程的柯西（Cauchy）问题中，探讨了作为泛函考虑的广义函数的一般概念，并且实质上用于一系列数学物理问题的解决．

1945年施瓦兹（Schwartz）开始了分布（即广义函数）方面的系统工作．1950～1951年，他的两卷专著《分布论》先后出版．在该书中，他收集和综合了当时一切有关主要成果，并在拓扑线性空间理论的基础上，以统一观点加以系统化，把分布定义为基本空间上的连续线性泛函，阐明了分布的性质与结构，引进了分布的卷积运算和傅里叶变换，指出了分布的一系列应用，特别是在偏微分方程和差分方程方面的应用．

分布论在数学分析中产生了两个重要结果．首先，它给予许多专门文献内的形式运算以严格论证，使之变成普通知识；其次，也是更重要的结果是：它开拓了数学研究的新领域，而且在这些领域如常微分方程、偏微分方程、运算微积、变换理论等的发展中赋予了动力，推动了数学分析的发展．因此可以认为施瓦兹的工作，特别是他的《分布论》的出版，标志着广义函数论作为数学的独立分支的诞生．

广义函数论诞生后，受到广大数学家、物理学家与工程技术专家的重视，产生了重大反响，得到了广泛应用．这可在盖尔凡特（Гельфанд）等所编的一套五卷专著《广义函数》中略见端倪．该

书在《分布论》的基础上，重新系统地推广和讨论了广义函数理论以及与它有关的分析上的问题，把数学分析、泛函分析、微分方程理论、概率论(广义随机过程)、局部紧李群的表示论以及各种空间上的调和分析等各方面的一系列问题联系起来，充分利用了当时的已有成果，特别是他们自己的成果. 博哥留波夫(Боголюбов)及其合作者把广义函数论成功地应用于量子场论的一些问题，使广义函数成为解决微观世界问题的必不可少的工具.

施瓦兹的分布所用的基本空间(通常是E空间或其子空间)，加上了很强的条件，这就限制了它的应用范围. 罗米欧(Roumieu)与保灵(Beurling)从不同方向推广了分布的定义，前者的基本空间是某些具紧支集的非拟解析函数类，后者的基本空间由傅里叶变换的性质产生. 柯玛兹(Komatsu)又在罗米欧的背景内给出了这两种广义函数的统一处理，使广义函数理论的研究跨进了一大步.

施瓦兹把广义函数论表示为拓扑线性空间的对偶理论，要求具备泛函分析的基础知识，还要走绕过共轭的弯路，而且这种方法的有效范围又局限于线性运算问题(注：近年来，由于理论物理学及技术科学的需要，特别是广义函数的乘法研究中，广义函数的非线性运算方面的文献已日渐增多，这里侧重于从广义函数概念方面考虑)，用起来仍感不便，于是在广义函数论发展过程中出现了各种流派，以发扬它的优点，改进它的不足.

米库辛斯基(Mikusinski)与西考尔斯基(Sikorski)提出了另一种构造广义函数的方法. 他们从弱收敛概念出发，类似于康脱尔(Cantor)由有理数集扩充为实数集的思想，定义广义函数为连续函数基本列的等价类. 这种定义方式，仅要求最简单的分析知识而不利用泛函分析方法，而且能对分布采取与普通函数同样的记号，并允许保持分析公式的同样形式和引进通常的运算术语. 这种定义方式的缺点是不便于应用，但它有助于关于分布在一点的

值的理解．美史吉斯(Мышкис)、列品(Лепин)和盖尔(Gal)对此定义作了抽象处理，推广了分布概念，并且把两种定义作了比较，证明了它们的等价性，使得广义函数更易理解．而吞普尔(Temple)与柯来瓦尔(Korevaar)从应用的角度出发采用了富于启发性的叙述方式．把广义函数表示为某种意义的通常函数序列的形式还有很多，特别是柯尼哥(Konig)把广义函数定义为幂级数

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\partial^n f_n(x),$$

这是现在最简捷的一种方式，也是处理发散概念的一种有效方法．

佐腾斡夫从把实轴上光滑的函数看作半复平面的解析函数边界值这一想法出发，建立了他的"超函数"理论．他附加了局部化原理后，证明了他的"超函数"包括了施瓦兹的分布作为特例，此外它也包括了柯玛兹型超分布．

公理化是现代数学的一个重要方法，西尔瓦(Silva)与柯尼哥探讨了广义函数的公理化结构．

近年来，利用广义函数的非正则运算，特别是乘法运算来定义广义函数，也是一个重要的方向．

以上研究广义函数的方法，都是在传统的数学分析或者说"标准分析"的范畴内进行的．60年代以来，罗宾逊(Robinson)应用他创始和发展的"非标准分析"理论，给出了准广义函数概念，也包括了施瓦兹的分布．

由于非标准分析理论中允许无限大像实数一样进行运算，所以可望解决发散困难，可能有较广阔的前途．

仅从上面不完全的叙述就可看出，尽管在广义函数论的形成和发展过程中出现了众多流派，但从方法论观点看来，主要有四种确定广义函数的方式，即对偶理论、形式观点、边界值表示与公理化方法，其目的主要是扩充某些古典的函数概念，以解决求导和极限交换问题．

从理论上说，有无限多种构造广义函数的方式，因此，今后当然会出现新的广义函数类，以解决实际研究中出现的新问题．但从另一方面来看，当前对于广义函数理论的研究，大半是孤立地和分散地研究某种广义函数类的定义方式、逻辑上的一些结果及其应用，而进一步完善和系统综合大量已有理论，以形成统一的、形式简单地研究对象，这方面的工作研究得还很不够，似为今后值得注意的一个方向．

目　录

第〇章 预备知识

对本书的读者，我们要求学习过实变函数、复变函数、线性代数、点集拓扑与泛函分析的基础知识．为了统一使用名词、术语和符号，也为了帮助读者复习有关内容，这里再对一些基本概念与定理用较一般的观点作一简述，而不深入细节．已学者可略去本章．

§1 集与序

1.集与子集

设X，Y是二集，我们用符号$x\in X$表示x是集X的元素．$X\subset Y$表示X是Y的子集．$X=Y$表示$X\subset Y$而且$Y\subset X$．记$p(x)$为关于元素x的性质．用$\{x\mid p(x)\}$或$\{x;p(x)\}$表示使$p(x)$成立的X的子集．$x\bar{\in}X$表示x不是X的元素．X关于Y的余集记为$Y\setminus X$，意为$x\in Y$但$x\bar{\in}X$．当Y为基本集时，$Y\setminus X$也记为X^c．空集记为$\varnothing$．单点x的集记为$\{x\}$．X的一切子集所成之集称为X的**幂集**，记为$P(X)$．

若p_1，p_2是关于x的二命题，则$p_1\Longrightarrow p_2$表示若p_1成立，则p_2成立．$p_1\Longleftrightarrow p_2$表示$p_1$与$p_2$**等价**．符号“$\exists$”表示存在，“$\forall$”表示所有的，“$\triangleq$”表示左边由右边定义．

2.映射

集X到集Y的映射f记为f：$X\longrightarrow Y$，或$x\mapsto f(x)$．定义域$D(f)$不声明时表示X．值域

$$R(f)=\{y \mid \exists x\in X \text{ 使得 } y=f(x)\}.$$

f 的**图形**记为

$$G(f)=\{(x,f(x)) \mid x\in D(f)\}.$$

集 A 在映射 f 下的像记为

$$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\subset D(f)\subset X\}.$$

f 的逆映射记为 f^{-1}，表示 f^{-1}: $Y\longrightarrow X$. Y 内子集 B 在映射 f 下的原像记为

$$f^{-1}(B)=\{x \mid x\in D(f) \text{ 且 } f(x)\in B\}.$$

若 f: $X\longrightarrow Y$, g: $Y\longrightarrow Z$，则复合映射

$$gf: X\longrightarrow Z, \text{即 } x\mapsto g(f(x)).$$

若 f: $X\longrightarrow Y$，而且 $x_1, x_2\in D(f)$ 时有

$$f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2,$$

则称 f 为**内射**或**单射**.

若 f: $X\longrightarrow Y$ 且 $f(X)=Y$，则称 f 为**满射**.

若 f 为内射而且为满射，则称 f 为**双射**.

设 f: $X\longrightarrow Y$, $A\subset X$; g: $A\longrightarrow Y$. 若 $x\in A$ 时有 $g(x)=f(x)$，则称 g 为 f 在 A 上的**限制**，记为 f_A 或 $f|_A$，而称 f 为 g 在 X 上的**延拓**.

3. 族

若 A 是非空集，X 是任意集，A 到 X 内的映射 $\alpha\mapsto x(\alpha)$ 称为 X 内的**族**. 今后，族仅用于映射的定义域 A 的集论性质，这时 $x(\alpha)$ 也记为 x_α，而记族为 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 称 A 为**指标集**，于是每个非空集 X 也能看作族(恒等映射) $x\mapsto x\ (x\in X)$，然而值得注意的是，X 内的族 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中 $\alpha\neq\beta$ 时不能推出 $x_\alpha\neq x_\beta$. 序列表示为 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. 若不混淆或指标集显然时，也记为 $\{x_\alpha\}$，而记序列为 $\{x_n\}$.

4. 集的运算

设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是集族，记

$$\bigcup_{\alpha\in A} x_\alpha \triangleq \{x \mid \exists\, \alpha\in A, \text{使 } x\in x_\alpha\}.$$

当$\{x_n\}$是集列时，也记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$；当$A$为有限集$\{1, 2, \cdots, k\}$时，也记为

$$\bigcup_{n=1}^{k} x_n \triangleq x_1\cup x_2\cup\cdots\cup x_k.$$

同理有

$$\bigcap_{\alpha\in A} x_\alpha \triangleq \{x \mid \forall\, \alpha\in A,\ x\in x_\alpha\}.$$

称

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \triangleq \{x \mid x(\alpha)\in X_\alpha\}$$

为集族X_α的**笛卡儿**(Descartes)**乘积**,这里x是A到$\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$内的映射.

$$\prod_{n=1}^{k} X_n \triangleq \{x=(x_1, x_2, \cdots, x_k) \mid x_n\in X_n,\ n=1, \cdots, k\}.$$

从A到B内的映射$x\mapsto y$也可看作有序元素对(x,y)的集，即$A\times B$的子集，于是坐标平面可以表示为

$$\mathrm{R}\times\mathrm{R} \triangleq \{(x,y) \mid x\in\mathrm{R} \text{ 且 } y\in\mathrm{R}\}.$$

又若$\forall\, \alpha, X_\alpha=X$，则$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$也记为$X^A$，表示从$A$到$X$内的一切映射之集.

设R是关于X的二元等价关系，即满足：

(1) 自反性：xRx；

(2) 对称性：$xRy \Longrightarrow yRx$；

(3) 传递性：xRy 且 $yRz \Longrightarrow xRz$.

由R的等价类所成的集(**商集**)记为X/R. 映射$x\mapsto \hat{x}$或$[x]$($\hat{x}$或

[x] 表示包含 x 的等价类) 称为从 X 到 X/R 上的**典型映射**或**商映射**.

5. 选择公理

设有集 $\mathscr{U}$,它的元素是非空集 X_α,则从每一个 X_α 中各选一个元素必组成一集，或者说，存在从 $\mathscr{U}$ 到 $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ 内的映射 f，使得 $f(x_\alpha)\in X_\alpha$. 如用集的笛卡儿乘积形式,即 $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\neq\varnothing$.

6. 序

若集 A 内的二元关系满足:

(1) 自反性: xRx;

(2) 反称性: xRy 且 $yRx\Longrightarrow x=y$;

(3) 传递性: xRy 且 $yRz\Longrightarrow xRz$,

则称 R 为集 A 内的**半序**, 记为"$\leqslant$". 集 A 赋以半序后称为**半序集**, 记为 $(A,\leqslant)$ 或 A.

空集可以认为是半序集,单元素集也认为是半序集.

$x<y$ 意为 $x\leqslant y$ 但 $x\neq y$. 类似地可以定义 $x>y$.

若 R_1 和 R_2 是 A 的两个序,而且 $xR_1y\Longrightarrow xR_2y$, 则称 R_1 精于 R_2 或 R_2 粗于 R_1. 由此我们定义了 A 上一切半序所成集的半序.

设 $(A,\leqslant)$ 是半序集,$B\subset A$. 若存在 $a_0\in A$, 使得 $a\leqslant a_0(\forall a\in B)$,则称 B 是被 a_0 优化的,称 a_0 是 B 的**上界**. 对偶地,若 $a_0\leqslant a(\forall a\in B)$,则称 B 是被 a_0 劣化的,称 a_0 是 B 的**下界**. 若 B 既是被优化的又是被劣化的,则称 B 是**半序有界集**. 若 B 是被优化的,而且有上界 a_0, 使得 $a_0\leqslant b$ 对 B 的一切上界 b 成立, 则 a_0 唯一且称 a_0 为 B 的**上确界**或最小上界, 记为 $a_0=\sup B$. 对偶地可定义**下确界** $\inf B$. 对于点偶 $(x,y)\in X\times X$,集 $\{(x,y)\}$ 的上、下确界 (存在时) 依次记为 $\sup(x,y)$ 和 $\inf(x,y)$.

设 $(A,\leqslant)$ 为一半序集. 若对每一对元素 $x,y\in A$, $\sup(x,y)$ 与 $\inf(x,y)$ 都存在,则称 $(A,\leqslant)$ 为**格**. 若对于每一非空子集 B

$\subset A$, $\sup B$ 与 $\inf B$ 都存在，则称 $(A,\leqslant)$ 为**完备格**．设 A 为一半序集，若对于每一对元素 $x,y\in A$，$x\leqslant y$ 与 $y\leqslant x$ 至少有一个成立，则称 A 为**全序集**．若 $\forall b\in A$，有 $a\in A$ 使 $a\leqslant b$ 时成立 $a=b$，则称 a 为集 A 的**极大元**，同理可定义集 A 的**极小元**．若半序集 A 的每个全序子集都有上界，则称 A 为**归纳集**．

曹恩(Zorn)引理 每个归纳集必有极大元．

曹恩引理与选择公理等价．

设 $(A,\leqslant)$ 是非空半序集．若 A 的每一子集 $\{x,y\}$（因此每一有限子集）都有上界，则称 A 为有方向 $\leqslant$ 的**有向集**．若 $a_0\in A$，子集 $\{x\in A\mid a_0\leqslant x\}$ 称为 A 的**截部**（严格地说是由 a_0 产生的 A 的截部）．设 A 是有向集，X 是任一集，若 $\forall\alpha\in A$ 确定了 $x_\alpha\in X$，则 $\{x_\alpha\mid x\in A\}$ 也是有向集，称为 X 内的**网**或**半序点列**或有向族．当 $A=\mathrm{N}$ 时，网即普通点列 $\{x_n\}$．对于任意 $\alpha_0\in A$，网的截部是子族 $\{x_\alpha\mid \alpha_0\leqslant\alpha\}$．

7．滤子

设 X 是集．若 X 的子集所成集族 $\mathscr{F}$ 满足下列条件：

(1) $\mathscr{F}\neq\varnothing$ 且 $\varnothing\overline{\in}\mathscr{F}$；

(2) $F\in\mathscr{F}$ 且 $F\subset G\subset X\Longrightarrow G\in\mathscr{F}$；

(3) $F\in\mathscr{F}$ 且 $G\in\mathscr{F}\Longrightarrow F\cap G\in\mathscr{F}$；

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的**滤子**或**滤过**．

X 的子集所成集族 $\mathscr{B}$ 若满足下列条件：

(1) $\mathscr{B}\neq\varnothing$ 且 $\varnothing\overline{\in}\mathscr{B}$；

(2) $B_1\in\mathscr{B}$ 且 $B_2\in\mathscr{B}\Longrightarrow\exists B_3\in\mathscr{B}$ 使得 $B_3\subset B_1\cap B_2$；

则称 $\mathscr{B}$ 为**滤基**．每个滤基 $\mathscr{B}$ 在 X 上产生一个唯一的**滤子** $\mathscr{F}$，使得 $F\in\mathscr{F}\Longleftrightarrow\exists B\in\mathscr{B}$ 使得 $B\subset F$，这时称 $\mathscr{B}$ 为滤子 $\mathscr{F}$ 的**基**．

在非空集 X 上一切滤子的集依集论意义下的包含关系组成归纳半序集，当 $\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$ 为 X 上的二滤子且 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$ 时，称 $\mathscr{F}_1$ 粗于 $\mathscr{F}_2$ 或 $\mathscr{F}_2$ 精于 $\mathscr{F}_1$．由曹恩引理知，对于 X 上的每个滤子 $\mathscr{F}$，在上述半序下必存在精于 $\mathscr{F}$ 的极大的滤子，称为 X 上的**超滤子**．

若$\{x_a\}_{a\in A}$是X内的网，其截部的值域$\{x_a \mid a_0\leqslant a\}$构成$X$上的一个滤基，对应的滤子称为此网的**截部滤子**．一个初等例子是X内的点列$\{x_n\}_{n\in N}$的截部滤子(赋N以通常的序)．

若$\{x_a\}_{a\in A}$是X内的网，则它的一切截部(当元素相等时去掉相同的)的全体组成的族$\mathscr{F}$构成一个滤子，称为对应于网$\{x_a\}_{a\in A}$的滤子．另一方面，滤子$\mathscr{F}$的元素F_a在集论的包含意义下组成一个有向集，从每个F_a中选取一个元素x_a得到一个有向集$\{x_a\}$，a的半序可取上述F_a的半序，于是用这种方法可得到一个网，即令

$$D=\{(x,F)\mid x\in F,\ F\in\mathscr{F}\},$$

D的半序定义为$G\subset F$时，$(x,F)\leqslant(y,G)$．再令$f(x,F)=x$，则

$$\{f(x,F)\mid(x,F)\in D\}$$

组成网，而且$\mathscr{F}$恰为它的截部组成的滤子，称为对应于滤子$\mathscr{F}$的网．

§2 一般拓扑

1.拓扑

设X是一个集，$\mathscr{T}$是满足下列条件的X的子集所成集族：

(1) $\varnothing$与X都属于$\mathscr{T}$；

(2) 任意多个$\mathscr{T}$的元素的并属于$\mathscr{T}$；

(3) 有限多个$\mathscr{T}$的元素的交属于$\mathscr{T}$；

则称$\mathscr{T}$为X上的一个**拓扑**，而称$(X,\mathscr{T})$为**拓扑空间**．不混淆时也称X为拓扑空间，称$\mathscr{T}$的元素为X的**开集**．

设Σ是X的子集族．若X的每个开集都是Σ的元素的并，则称Σ是X的**拓扑基**．

设$x\in X$，若V_x是X内包含x的开集，而且$V_x\subset U_x$，则称U_x是x的**邻域**．设$\mathscr{B}(x)$表示x的一切邻域的全体，则$\mathscr{B}(x)$满足下列条件：

(1) 每一点的每个邻域必包含这一点；

(2) 若X的某一子集包含元素x的某一邻域，则它本身也是x的邻域；

(3) $\mathscr{B}(x)$内有限多个元素的交集仍属于$\mathscr{B}(x)$.

(4) 对于点x的每个邻域V，必有x的邻域W，使V为W中每个元素的邻域.

反之，若X的某些子集的全体满足上述四个条件，则它定义X的一个拓扑.

设$\mathscr{B}_x$表示点x的某些邻域的全体. 若x的每个邻域都包含$\mathscr{B}_x$的某个元素，则称$\mathscr{B}_x$是x的**邻域基**或**基本邻域组**. 包含x的一切开邻域的全体组成x的一个邻域基. 因此，确定X的拓扑时可以只考虑包含x的开邻域.

空间X的一切点的邻域基$\mathscr{B}_x$的全体称为**空间X的邻域基**，记为$\mathscr{B}$，它具有下列性质：

(1) 对于每一个$x\in X$，若$V\in\mathscr{B}_x$，则$x\in V$；

(2) 对于每一个$x\in X$，若$V_1, V_2\in\mathscr{B}_x$，则存在$V\in\mathscr{B}_x$使得$V\subset V_1\cap V_2$；

(3) 对于每一个$x\in X$，若$V_x\in\mathscr{B}_x$，则存在$U_x\in\mathscr{B}_x$，使得$U_x\subset V_x$，而且对于任意的$y\in U_x$，存在$V_y\in\mathscr{B}_y$，使得$V_y\subset V_x$.

反之，这三个条件也刻画了空间的邻域基的特征.

对于同一点的两个邻域基，若一个邻域基的每个邻域总包含另一个邻域基的邻域，则称它们为**等价邻域基**. 类似地可定义拓扑基的等价性.

若空间X的每一点都有可数(可列)的邻域基，则称X满足**第一可数(可列)公理**. 若X存在可数(可列)的邻域基，则称X满足**第二可数(可列)公理**.

X内开集的余集称为**闭集**. 设$x\in M\subset X$，如果存在包含x的开集$G\subset M$，则称x是M的**内点**. M的一切内点的全体称为M的

内部或**核**，记为 M°. 可以证明，M的内部是M内一切开子集的并，而且M是开集的充要条件是 $M=M^\circ$. 若对于 x 的每个邻域V都有

$$(V\setminus\{x\})\cap M\neq\varnothing,$$

则称 x 是集M的**聚点**. M的聚点的全体称为M的**导集**，记为 M'. 集 $M\cup M'$ 称为M的**闭包**，记为 $\overline{M}$. 可以证明，$\overline{M}$是包含M的一切闭子集的交，而且M是闭集的充要条件是 $M=\overline{M}$. 集 $\overline{M}\setminus M^\circ$ 称为M的**边界**，记为 ∂M.

设 $A,B\subset X$. 若 $A\subset\overline{B}$，则称B关于A**稠密**. 若 $B\subset A$ 而且 $A\subset\overline{B}$，则称B在A内稠密. 若拓扑空间X包含可列的稠密子集，则称X为**可分空间**. 若X不是两个不相交的非空开集(或闭集)的并，则称X是**连通空间**.

2. 连续性与收敛性

设X和Y是拓扑空间，f是从X到Y内的映射，$x\in X$. 若对于 $y=f(x)$ 的每一个邻域 V，$f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域，则称 f 在点 x 连续. 若 f 在X的每点连续，则称 f 为**连续映射**. 从X到Y上的连续双射称为**同胚映射**. 若存在从X到Y上的同胚，则称空间X与Y是**同胚空间**.

设$\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是拓扑空间X上的滤子，$x_0\in X$. 若对于 x_0 的每个邻域U，存在 $\alpha\in I$，使 $\mathscr{F}_\alpha\subset U$，则称$\mathscr{F}$**收敛**于 x_0. X内的序列（更一般地，网）$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 收敛于 x_0 是指对于 x_0 的每个邻域 U，存在 $\beta\in I$，使得 $\alpha\geqslant\beta$ 时都有 $x_\alpha\in U$. 设Y也是拓扑空间，而且 f 是从X到Y内的映射. 若由 $f(x)$ 产生的滤子收敛于 $y\in Y$，则称 f 沿 x 的邻域滤子（即 x 的一切邻域的集是X上的滤子）收敛于 y. 例如 f 在点 $x\in X$ 连续的充要条件是 f 沿 x 的邻域滤子收敛于 $y=f(x)$.

注：拓扑空间内的网收敛于 x_0 时，对应的滤子也收敛于 x_0；反之亦然. 因此，网与滤子可引导出本质上等价的理论，但滤子用

集作基本概念，而网用点作基本概念，它们的关系可参看后面参考文献42.

3. 拓扑的比较

设X是任意集，$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$是X上的两个拓扑. 若每一个$\mathscr{T}_1$的开集也是$\mathscr{T}_2$的开集，则称$\mathscr{T}_1$弱于(或粗于)$\mathscr{T}_2$，或称$\mathscr{T}_2$强于(或精于)$\mathscr{T}_1$. 设$\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$X$上的拓扑族，则存在弱(强)于每个$\mathscr{T}_\alpha$的最弱(强)拓扑$\mathscr{T}_1(\mathscr{T}_0)$. 集$G$是$\mathscr{T}_1$的开集的充要条件是：对于每个$\alpha\in A$，$G$都是$\mathscr{T}_\alpha$的开集. 称拓扑$\mathscr{T}_1(\mathscr{T}_0)$是族$\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$的下(上)确界.

设X是任意集，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$是拓扑空间族，而$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$是从$X$到$X_\alpha$内的映射族. 使每个$f_\alpha$都连续的最弱拓扑称为$X$上关于族$\{(x_\alpha,f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$的**射影拓扑**(或**核拓扑**). 对偶地，使每个g_α都连续的最强拓扑，称为X上关于族$\{(x_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha\in A}$的**归纳拓扑**(或**壳拓扑**)，这里$\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$是从$X_\alpha$到$X$内的映射族. 若$A=\{1\}$，而且$\mathscr{T}_1$是$X_1$上的拓扑，则$X$上关于$(X_1,f_1)$的射影拓扑称为$\mathscr{T}_1$在$f_1$下的逆像，而关于$(X_1,g_1)$的归纳拓扑称为$\mathscr{T}_1$在$g_1$下的直接像.

4. 子空间、积、商

若$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间，$A\subset X$，f是典型嵌入$A\longrightarrow X$，则A上的诱导拓扑是$\mathscr{T}$在f下的逆像，这个拓扑的开集是X的开子集同A的交集. 在诱导拓扑下，称A为X的**拓扑子空间**. 若$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间，R是X上的等价关系，g是从X到商集X/R内的典型映射，则$\mathscr{T}$在g下的直接像称为$\mathscr{T}$的**商拓扑**. 在这个拓扑下，商集X/R是X被R除的拓扑商. 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$是拓扑空间族，$X$是它们的笛卡儿乘积，$f_\alpha$是从$X$到$X_\alpha$上的映射，$X$关于族$\{(X_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$上的射影拓扑称为$X$上的**乘积拓扑**. 在这种拓扑下，称$X$为族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$的**拓扑积**，也记为$X=\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$. 设$X$和$Y$是拓扑空间，$f$是从$X$到$Y$内的映射. 若对于每个开集$G\subset X$，$f(G)$是$Y$的拓

扑子空间 $f(X)$ 内的开集，则称 f 是**开映射**.

5.分离公理

设 X 是拓扑空间. 若对于 X 内的任意两点 x 和 y，必有一点的邻域不包含另一点，则称 X 是 T_0 型分离空间或称 **T_0 空间**. 若对任意二点 x 和 y，x 必有邻域不包含 y，而 y 也有邻域不包含 x，则称 X 是 **T_1 空间**. 若对任意二点 x 和 y，x 与 y 必有不相交的邻域，则称 X 是 **T_2 空间**，或豪斯道夫 (Hausdorff) 空间. 在 T_2 空间内，每个网如有极限，则极限唯一. 若 T_1 空间内每点 x 和每一闭集 F，当 $x \bar{\in} F$ 时，x 与 F 有不相交的邻域，则称 X 是 **T_3 空间**或正则空间. 若 T_1 空间内任二不同的闭集总有不相交的邻域，则称 X 是 **T_4 空间**或正规空间. 显然，T_4 空间必为 T_3 空间，T_3 空间必为 T_2 空间，…，T_1 空间必为 T_0 空间. 反之不成立.

6.一致性结构

设 X 是任意集，对 $X \times X$ 的任意子集 W 和 V，记

$$W^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in W\},$$

$$V \circ W = \{(x,z) \mid \exists\, y \in X, \text{使得}\,(x,y) \in W, (y,z) \in V\},$$

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\},$$

则称 Δ 为 $X \times X$ 的**对角线**. 设 $\mathscr{F}$ 是 $X \times X$ 上的滤子，而且满足下列公理：

(1) $W \in \mathscr{F} \Longrightarrow W \supset \Delta$;

(2) $W \in \mathscr{F} \Longrightarrow W^{-1} \in \mathscr{F}$;

(3) $W \in \mathscr{F} \Longrightarrow \exists\, V \in \mathscr{F}$ 使得 $V \times V \subset W$,

则称滤子 $\mathscr{F}$ 在 X 上定义一个**一致性结构**，称 W 为它的**邻**. 一致性结构 $\mathscr{F}$ 称为分离的是指它满足

(4) $\bigcap\limits_{W \in \mathscr{F}} W = \Delta.$

若 X 的拓扑结构由一致性结构 $\mathscr{F}$ 导出，则称 $(X, \mathscr{F})$ 为**一致性空间**.

设 X 是一致性空间，$\mathscr{F}_0$ 是 X 上的滤子. 若对于每一个邻 V，$\exists F\in\mathscr{F}_0$，使得 $F\times F\subset V$，则称 $\mathscr{F}_0$ 为 X 上的**柯西(Cauchy)滤子**. 若每一个柯西滤子总收敛于 X 内一点，则称 X 为**完备空间**. 每个一致性空间 X 总有完备化空间 $\bar{X}$，使 X 同构于 $\bar{X}$ 的稠密子空间. 一个序列的截部滤子是柯西滤子时，称为**柯西序列**.

7. 度量空间

若集 X 的任意二点 x, y，都对应一个非负实数 $\rho(x, y)$，满足下列条件：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时有 $\rho(x,y)=0$；

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$； $(\forall z\in X)$

则称 X 为由 ρ 确定的**度量空间**，记为 (X,ρ) 或简记为 X. 称 ρ 为 x 与 y 的**距离**或**度量**.

若拓扑空间 X 的拓扑能由一距离导出，则称 X 为**可度量化**的.

集 $B(x_0,r)\triangleq\{x|\rho(x,x_0)<r\}$ $(\bar{B}(x_0,r)\triangleq\{x|\rho(x,x_0)\leqslant r\})$ 称为中心在 x_0，半径为 r 的**开(闭)球**. 在度量空间内取一切半径为 $\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 的开球 $B(x,\frac{1}{n})$ 组成 X 的拓扑基，于是度量空间是满足第一可数公理的 T_2 空间. 当且仅当 X 满足第二可数公理时它是可分的. 可以证明，集

$$W_n\triangleq\left\{(x,y)|\rho(x,y)<\frac{1}{n}, n\in\mathrm{N}\right\}$$

组成 $X\times X$ 上的一个滤子基，它在 X 上定义一个分离的一致性结构. 由于度量空间可理解为赋距离的一致性空间，因而一切一致性概念都可应用于度量空间.

设 M 是度量空间 X 内的点集. 如果 M 包含在某个开球内，则称 M 是 X 内的**有界集**.

8. 紧空间

设X是拓扑空间．若X的每个开覆盖总有有限的子覆盖，则称X为**紧空间**．若X的每个无限序列总包含收敛子序列，则称X为**列紧空间**．于是，由有限多个点组成的拓扑空间既是紧的，也是列紧的．若A作为X的拓扑子空间是紧（列紧）的，则称A是X的**紧（列紧）子空间**．若$\bar{A}$是紧（列紧）的，则称A是X的**相对紧（列紧）子空间**．若拓扑空间X内每点都有紧邻域，则称X为**局部紧空间**．设X是T_2空间，则下列概念等价：

(1) X是紧空间；

(2) 对于X的一个闭子集族，若每个有限子族有非空交，它也有非空交；(有限交性质)

(3) X上的每个滤子有聚点；

(4) X上的每个超滤子收敛．

9. 范畴与贝尔(Baire)空间

设X是拓扑空间，A是X的子集．若$(\bar{A})^{\circ}$是空集，则称A在X内**无处稠密**．若A是X内可数个无处稠密集的并集，则称A为贫乏的或**第一范畴**的．非贫乏的集称为**第二范畴**的．若X内每个非空开子集都是非贫乏的，则称X是**贝尔空间**．每个局部紧正则空间和每个完备可度量化空间都是贝尔空间(即贝尔定理)．

§3 线性代数

1. 线性空间

设L是任意集，K是一个域．若存在$L\times L$到L内的映射$(x,y)\mapsto x+y$（称为加法）以及$K\times L$到L内的映射$(\lambda,x)\mapsto\lambda x$（称为左数乘），使$L$构成阿贝尔(Abel)加法群，即满足下列条件：

(1) $(x+y)+z=x+(y+z)$；

(2) $x+y=y+x$；

(3) 存在零元素$0\in L$，使得$x+0=x$对$\forall x\in L$成立；

(4) 对于一切元素 $x\in L$,存在逆元素 $y\in L$,使得 $x+y=0$;(我们不区别数 0 与 L 的零元素符号，读者可根据上下文意思理解.)

关于左数乘,满足:

(5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

(6) $1x=x$;

关于加法与左数乘满足两种分配律:

(7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

(8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

其中 $\alpha,\beta\in K,x,y\in L$, 则称 L 为 K 上的**左线性空间**. 若数乘写为 $(\lambda,x)\mapsto x\lambda$, 且(1)～(4)如前面,(5)～(8)相应成立,则称 L 为 K 上的**右线性空间**. 当 K 可交换时,没有必要区别左、右,统称为 K 上的**线性空间**. 我们后边只考虑 K 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 的情形,也记为 K. 若 M 是 L 的线性子空间,关系"$x-y\in M$"是 L 内的等价关系,则商集成为 K 上的线性子空间,称为商空间,记为 L/M,这里记等价类为

$$\hat{x}=x+M,\quad \hat{y}=y+M,\quad \hat{x}+\hat{y}=x+y+M,$$
$$\widehat{\lambda x}=\lambda x+M.$$

2. **哈密尔(Hamel)基**

设 L 是 K 上的线性空间,$x_i\in L(i=1,2,\cdots,n)$. 元素 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ 称为 x_i 的**线性组合**,这里 $\lambda_i\in K(i=1,2,\cdots,n)$. 若 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是无限族,则元素 x_α 的和记为 $\sum_{\alpha\in I}x_\alpha$.

A 的一切有限线性组合的全体称为 A 的**线性包**,记为 $[A]$,称为由 A 生成的线性子空间. 规定 $[\varnothing]=\{0\}$. 设 $A\subset L$, 若对于 A 的每个非空有限子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ 时必有一

切数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是 0，则称 A 为**线性无关**的，否则称 A 为**线性相关**的．若 H 为 L 的线性无关子集而且 $[H]=L$，则称 H 为 L 的**哈密尔基**．当 H 为 L 的哈密尔基时，对于 L 的每一个元素 x，必有 $x=\Sigma\xi h(h\in H, \xi\in K, \Sigma$ 为有限和)，这时称 ξ 为 x 的相应于 h 的系数．由定义知 x 的表达式唯一．可以证明，每个线性空间都存在哈密尔基．

3．线性映射

设 L_1 和 L_2 是同一域 K 上的两个线性空间，f：$L_1\to L_2$．若对于任意 $\lambda_1, \lambda_2\in K$ 和 $x_1, x_2\in L_1$，有

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2),$$

则称 f 为**线性映射**．记从 L_1 到 L_2 内的一切线性映射所成之集为 $L(L_1, L_2)$，在其中由

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

定义加法，而由

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

定义数乘，这里 $x\in L_1$，则 $L(L_1, L_2)$ 成为 K 上的线性空间．若存在线性双射 f：$L_1\to L_2$，则称空间 L_1 与 L_2 是**线性同构**的，称 f 为从 L_1 到 L_2 上的**线性同构映射**，或**同构映射**．

若 f：$L_1\to L_2$ 是线性的，L_1 的子空间 $N\triangleq f^{-1}(0)$ 称为 f 的**零空间**或**核空间**．

§4 测度空间与积分

1．测度

设 X 是任意集，Σ 是 X 的某些子集组成的非空集族．若对任意 $A, B\in\Sigma$，都有：

(1) $A\cup B\in\Sigma$；

(2) $A\backslash B\in\Sigma$；

则称 Σ 是一个**环**，或者说，环就是对于有限运算“$\cup$”和“$\setminus$”封闭的非空集族．特别，若又有 $X\in\Sigma$，则称 Σ 是一个**代数**．若 Σ 不仅对于有限并运算封闭，而且对于可数并运算也封闭，即除了满足条件（1）和（2）外，还满足条件

$$(3)\quad A_n\in\Sigma\,(n=1,2,\cdots)\Longrightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\Sigma,$$

则称 Σ 是 **σ 环**．当 Σ 是 σ 环且满足 $X\in\Sigma$ 时，称它是 **σ 代数**．

显然 σ 环和 σ 代数关于可数交运算也是封闭的．更进一步，若集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$，则它的上极限集和下极限集必属于 Σ．

设 X 是任意集，Σ 是由 X 的子集组成的 σ 环．若 $X=\bigcup\limits_{A\in\Sigma}A$，则称 (X,Σ) 是**可测空间**，而任何 $A\in\Sigma$ 都称为 (X,Σ) 内的**可测集**．

设 $\overline{\mathbf{R}}=[-\infty,+\infty]$，$\Sigma$ 是由集 X 的某些子集组成的集族．若 μ：$\Sigma\to\overline{\mathbf{R}}$，则称 μ 是以集为自变元而且取值为实数或 $\pm\infty$ 的**集函数**．

设 Σ 是由集 X 的某些子集组成的环，μ 是 Σ 上的集函数．若 μ 满足下列性质：

（1）$\mu(\varnothing)=0$；

（2）非负性：$\forall A\in\Sigma,\ \mu(A)\geqslant 0$；

（3）可数加性：对于任何集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$，若 $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Sigma$，则有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n);$$

则称集函数 μ 为环 Σ 上的**测度**．若 $A\in\Sigma$，$\mu(A)<+\infty$，则称 A 有**有限测度**．若 $\forall A\in\Sigma$ 都有有限测度，则称测度 μ 是有限的．若 $X\in\Sigma$（即 Σ 是代数）且 $\mu(X)<+\infty$，则称测度 μ 是全有限的．若 $A\in\Sigma$，而且有一列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$，每个 A_n 都有有限测度，又有 $A\subset$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，则称 A 的测度是 σ 有限的．若 Σ 内每个集 A 的测度都是 σ 有限的，就说测度 μ 是 σ **有限测度**．若 X 是代数，而且 X 的测度是 σ 有限的，就称测度 μ 是全 σ 有限的．

设 (X,Σ) 是一个可测空间，μ 是 Σ 上的一个测度，则称它为**测度空间**，记为 (X,Σ,μ)，有时简称 X 是测度空间．若 (X,Σ,μ) 是测度空间，μ 是 Σ 上的有限(全有限，σ 有限，全 σ 有限)测度时，则称这个测度空间是有限(全有限，σ 有限，全 σ 有限)的．

2．可测函数

设 (X,Σ,μ) 是测度空间，$A\subset X$，$x(t)$ 是定义在 A 上的实(或复)值函数．如果对于实轴 R(或复平面 C)上的任意开集 G，集 $\{t|x(t)\in G\}\in\Sigma$，则称函数 $x(t)$ 是 μ 可测函数，简称**可测函数**．

设 (X,Σ,μ) 是测度空间．若与 X 的元素有关的某性质 P 除去一个零测度集外处处成立，则称它是 μ-**几乎处处**成立的，简记为 μ-p.p. 或 p.p..

定理 4.1 设 (X,Σ,μ) 是具有 σ 有限测度的空间，则有下列关于几乎处处收敛的结论：

(1) (叶果洛夫(Егоров)定理)设 B 是 μ 可测集，$\mu(B)<+\infty$．若在 B 上 μ-p.p. 有限的 μ 可测函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 B 上 μ-p.p. 收敛于某个有限的 μ 可测函数 $x(t)$，则对于每个正数 ε，都存在 B 的一个子集 E，使得 $\mu(B\backslash E)<\varepsilon$，而且在 E 上 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$．

(2) (关于收敛的稳定性定理)若可测函数序列 $x_n\to 0$, p.p.，则存在正数的递增序列 $\{\lambda_n\}_{n\in N}$，当 $\lambda_n\to\infty$ 时，有 $\lambda_n x_n\to 0$, p.p..

(3) (关于正则收敛定理)若可测函数序列 $x_n\to 0$, p.p.，则存在可测的几乎处处有限的在 X 上非负的函数 $y(t)$ 和正数序列 $\varepsilon_n\to 0$，使得

$$|x_n(t)|\leqslant\varepsilon_n y(t),\ \text{p.p.}.$$

(4) (关于对角线序列定理)若对于任何 $k\in$ N，有 $x_{n_k}\to x_k$, p.

p. $(n\to\infty)$和 $x_k\to x$, p. p. $(k\to\infty)$，则存在递增序列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使得对角线序列 $x_{k_{n_k}}\to x$, p. p. $(k\to\infty)$.

设函数 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$和 $x(t)$ 在 A 上可测，$A\in\Sigma$，$\mu(A)<+\infty$. 若对于任意正数 ε，

$$\mu\{t\in A \mid |x_n(t)-x(t)|>\varepsilon\}\to 0(n\to\infty),$$

则称序列$\{x_n(t)\}$在集 A 上**依测度收敛**于 $x(t)$，记为 $x_n\to x(\mu)$.

用类似方式可定义可测函数网 $\{x_\alpha(t)\}$ 依测度收敛于可测函数$x(t)$，记为 $x_\alpha\to x(\mu)$.

几乎处处收敛与依测度收敛有下列关系：

定理 4.2　设 $x_n(n=1,2,\cdots)$和 x 是在 A 上定义的可测函数.

(1) 若 $x_n\to x$, p. p.，则 $x_n\to x(\mu)$.

(2) 设(X,Σ,μ)是具有 σ 有限测度的空间. 若$x_n\to x(\mu)$，则必有子序列$\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to x$, p. p..

由定理易知，两个可测函数的加法和乘法运算关于依测度收敛是连续的.

3. 积分

在本段总设(X,Σ,μ)是测度空间，$x(t)$是定义在X 上的实(或复)值可测函数. 若 $x(t)$在有限个(例如 n 个)不相交的 μ 可测集 B_j 内的每个上都等于非零的有限常数，而在 $X\setminus\bigcup_{j=1}^{n}B_j$上等于零，则称函数 $x(t)$是**简单函数**. 记 $x(t)$在 B_j 上的值为 a_j，若

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\mu(B_j)<\infty,$$

则称 $x(t)$在X 上是 μ **可积函数**，并把数值$\sum_{j=1}^{n}a_j\mu(B_j)$定义为$x(t)$在$X$ 上关于测度 μ 的**积分**，记为

$$\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t).$$

在不发生混淆时也记为$\int_X x(t)$或$\int x(t)$. 设 $x(t)$ 是X上的 μ-几乎处处定义的可测函数，若有可积的简单函数序列$x_n(t)\to x(t)(\mu)$, p.p.，而且满足

$$\lim_{n,k\to\infty}\int_X |x_n(t)-x_k(t)|\mu(\mathrm{d}t)=0,$$

则称 $x(t)$是X上的μ **可积函数**，简称可积函数. 上面极限式表明

$$\lim_{n\to\infty}\int_X x_n(t)\mu(\mathrm{d}t)$$

存在且为有限值. 此极限值不依赖于序列 $\{x_n(t)\}$ 的选择. 我们把极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_X x_n(t)\mu(\mathrm{d}t)$$

定义为$x(t)$在X上关于测度μ的**积分**

$$\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t)$$

的值，有时也记为$\int x(t)\mu(\mathrm{d}t)$ 或$\int x(t)$.

上述积分有下列性质：

(1) 若 $x(t)$和 $y(t)$都可积, α,β 是常数，则 $\alpha x(t)+\beta y(t)$ 也可积，而且有

$$\int_X [\alpha x(t)+\beta y(t)]\mu(\mathrm{d}t)$$

$$=\alpha\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t)+\beta\int_X y(t)\mu(\mathrm{d}t).$$

(2) $x(t)$可积的充要条件是$|x(t)|$可积.

(3) 若 $x(t)$可积且 $x(t)\geqslant 0$, μ-p.p.，则$\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t)\geqslant 0$. 又

当且仅当 $x(t)=0$, p. p. 时 $\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t)=0$.

(4) 若$x(t)$可积，则集函数$\nu(B)\triangleq\int_B x(t)\mu(\mathrm{d}t)$是$\sigma$可加的，即对于 Σ 的任何一个互不相交集列$\{B_j\}$都有

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(B_j),$$

这里
$$\int_B x(t)\mu(\mathrm{d}t)=\int_X \chi_B(t)x(t)\mu(\mathrm{d}t),$$

而$\chi_B(t)$是集 B 的特征函数.

(5) (4)中的$\nu(B)$在下述意义下关于 μ 是绝对连续的：若 $\mu(B)=0$，则 $\nu(B)=0$，即 $\lim\limits_{\mu(B)\to 0}\nu(B)=0$ 关于 $B\in\Sigma$ 一致成立.

(6) (勒贝格(Lebesgue)控制收敛定理) 设$\{x_n(t)\}$是可积函数序列而且 $x_n\to x(\mu)$. 若存在非负可积函数 $y(t)$，使得

$$|x_n(t)|\leqslant y(t),\ \text{p. p.}\ (n=1,2,\cdots),$$

则函数 $x(t)$ 也可积，而且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X x_n(t)\mu(\mathrm{d}t)=\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t).$$

(7) (勒维(Levi)定理) 若 $x_n(t)\geqslant 0$, p. p.，而且 $x_n(t)$单调增加，又 $x_n(t)\to x(t)$, p. p.，则(6)中极限式成立.

注：当函数不是几乎处处有限时，(7)仍成立.

(8) (勒贝格定理)若函数 $x_n(t)\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$而且都是可积的，又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X x_n(t)\mu(\mathrm{d}t)<+\infty,$$

则$x(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n(t)$几乎处处有限，而且

$$\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X x_n(t)\mu(\mathrm{d}t).$$

(9) (法都(Fatou)引理)若 $x_n(t)\geqslant 0$, p. p. , 而且$x_n\to x(\mu)$, 则

$$\int_X x(t)\mu(\mathrm{d}t)\leqslant \sup_n \int_X x_n(t)\,\mu(\mathrm{d}t).$$

(10)拉东-尼克丁(Radon-Nikodym)定理)设(X, Σ, μ) 是 σ 有限测度空间, ν 是定义在 Σ 上的有限的关于 μ 为绝对连续的集函数,则存在(精确到一个零测度集是唯一的)依测度 μ 可积的在 X 上定义的函数 $x(t)$, 使得

$$\nu(A) = \int_A x(t)\mu(\mathrm{d}t). \quad (A\in\Sigma)$$

当且仅当 $x(t)\geqslant 0$, p. p. 时$\nu(A)\geqslant 0$.

为了利用累次积分来计算关于测度乘积的重积分,我们考虑乘积测度.

设(X, Σ_X, μ)和(Y, Σ_Y, ν)是两个 σ 有限的测度空间. 记 Σ_Z^0 为集合 $Z = X\times Y$ 的子集所组成的最小 σ 代数. 它包含形如 $A\times B$ 的一切集,其中 $A\in\Sigma_X$, $B\in\Sigma_Y$. 可以证明, 在 σ 代数 Σ_Z^0 上存在唯一的测度 λ, 使得对于任意的 $A\in\Sigma_X, B\in\Sigma_Y$, 有

$$\lambda(A\times B) = \mu(A)\nu(B).$$

不妨认为 λ 是完全测度,即 $S\subset T\in\Sigma_Z^0$ 时,从 $\lambda(T)=0$ 推出 $S\in\Sigma_Z^0$ (当然 $\lambda(S)=0$), 否则用 Σ_Z表示形如 $S\cup N$ 的全体集合, 其中 $S\in\Sigma_Z^0$, 而 $N\subset T\in\Sigma_Z^0$, $\lambda(t)=0$. 于是 Σ_Z是 σ 代数, 而且, 若把 λ 的定义域扩张到 Σ_Z 上, 令 $\lambda(S\cup N)=\lambda(S)$, 则延拓的函数就是 Σ_Z 上的测度,这时所构造的具有完全的 σ 有限测度的空间(Z, Σ_Z, λ)叫做空间(X, Σ_X, μ)和(Y, Σ_Y, ν)的乘积, 而测度 λ 叫做测度 μ 和 ν 的**乘积测度**,记为 $\lambda = \mu\times\nu$.

类似地,可以定义 $X\times Y$ 上的 $\mu\times\nu$ 可测函数 $f(x, y)$ 和 $\mu\times\nu$ 可积函数 $f(x, y)$, $\mu\times\nu$ 可积函数在 $X\times Y$ 上的积分值记为

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)(\mu\times\nu)(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

或

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y).$$

定理 4.3(富比尼(Fubini)定理)　设函数$f(x,y)(x\in X,y\in Y)$关于测度$\lambda=\mu\times\nu$可积,则关于μ几乎处处对于$\forall x\in X$,函数$f_x(y)=f(x,y)$关于测度ν可积. 其次,函数$g(x)=\int_Y f(x,y)\nu(\mathrm{d}y)$关于测度$\mu$可积,而且

$$\int_Z f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y))=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\,\nu(\mathrm{d}y)\right]\mu(\mathrm{d}x).$$

定理 4.4(东乃里(Tonelli))　设$f(x,y)$是Z上的非负λ可测函数,则关于μ几乎处处对于$\forall x\in X$,函数$f_x(y)=f(x,y)$ ν可测. 此外,函数$g(x)=\int_Y f(x,y)\nu(\mathrm{d}y)$(可能在正测度集上取无限值)$\mu$可测,而且

$$\int_Z f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y))=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\,\nu(\mathrm{d}y)\right]\mu(\mathrm{d}x)$$

与这个积分值取有限或无限无关.

4. 空间 $S(X,\Sigma,\mu)$

设(X,Σ,μ)是测度空间,以$S(X,\Sigma,\mu)$表示在X上定义的几乎处处有限的所有可测函数的全体,同时我们将几乎处处相等的函数等同起来,即把它们看成空间$S(X,\Sigma,\mu)$的同一元素. 由此可见,空间$S(X,\Sigma,\mu)$的元素就是几乎处处相等函数的等价类,而且,若$x\in S(X,\Sigma,\mu)$,则以$x(t)$表示这个类中的任何可测函数,同时,总可以认为$x(t)$处处有限.

若测度μ是σ有限的,则$S(X,\Sigma,\mu)$可以成为度量空间,其中关于度量的收敛与依测度收敛一致. 以后,如无相反声明,我们总假定μ是σ有限的.

为了在$S(X,\Sigma,\mu)$内建立度量，取在X上可测的函数$f(t)$，满足下列条件：

(1) $f(t)\geqslant 0\ (t\in X)$；

(2) $\int_X f(t)\mu(\mathrm{d}t)=1$.

这样的函数必然存在．实际上，因为测度μ是σ有限的，所以$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$，其中$X_n$互不相交而且$0\leqslant\mu(X_n)<+\infty(\forall n\in\mathrm{N})$．令

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{X_n}(t)}{2^n\mu(X_n)}$$

即可．对于任何$x,y\in S(X,\Sigma,\mu)$，我们定义

$$\rho(x,y)=\int_X\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}f(t)\mu(\mathrm{d}t),$$

则可证$\rho(x,y)$确定$S(X,\Sigma,\mu)$上的距离，而且其中的收敛性与依测度收敛一致．又可证$S(X,\Sigma,\mu)$关于ρ是完备的．

§5　赋范线性空间

1.赋范线性空间概念

设X是数域(实或复)K上的线性空间．如果对于任一元素$x\in X$，都对应一个实数$\|x\|$，满足下列条件：

(1) 非负性：$\|x\|\geqslant 0$，而且$\|x\|=0$的充要条件是$x=0$；

(2) 绝对齐性：$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$，其中$\alpha$为任意实数或复数；

(3) 次加性：$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

则称X为(实或复)**赋范线性空间**，$\|x\|$称为元素x的**范数**．由范数确定的拓扑称为**范数拓扑**．

注：在上述条件中，若条件(2)换为：存在常数$p>0$，使得

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|^p\|x\|$，

则称$\|x\|$为x的**p范数**，称X为**赋p范线性空间**. 易证$p\leqslant 1$.

赋范线性空间X可用下面的方式

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

定义x与y的距离，这时称ρ为由范数确定的距离. X依此距离完备时，称为**巴拿赫**(Banach)**空间**，简称B**空间**.

赋范线性空间X中的范数$\|\cdot\|$及线性运算关于它的范数拓扑连续，即，若序列$\{x_n\}\subset X$，$\{y_n\}\subset X$，$\{\alpha_n\}\subset K$，$x,y\in X$，$\alpha\in K$，而且$x_n\to x$，$y_n\to y$，$\alpha_n\to\alpha$，则

$$\|x_n\|\to\|x\|,\quad x_n+y_n\to x+y,\quad \alpha_n x_n\to\alpha x.$$

设X_1，X_2都是赋范线性空间. 若它们作为线性空间是同构的，且在线性同构映射下等距，即$\forall x,y\in X$，有

$$\|Ax-Ay\|_2=\|x-y\|_1,$$

则称X_1与X_2**等距同构**. 这时$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$依次表示X_1，X_2内的范数.

任一赋范线性空间X都有完备化空间X_0，而且除去等距同构不计外，X_0是唯一的.

2. 有界线性算子

设X，Y为赋范线性空间，D是X的子集，T：$D\to Y$，则称T为**算子**. 若T的定义域$D(T)$是X的子空间，而且对于一切x，$y\in D(T)$有

$$T(x+y)=Tx+Ty,$$

则称T为加法的；若对于一切$x\in D(T)$和数α有

$$T(\alpha x)=\alpha T(x),$$

则称T为齐次的. 齐次加法算子称为**线性算子**. 若线性算子T满足下列条件：存在正数M，使得$\forall x\in D(T)$都有$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$，则称T为**有界算子**.

定理5.1 设T：$D\to Y$是线性算子，则T有界的充要条件为：它将D中有界集映成Y中有界集. 这里D是X的子空间.

定理 5.2 设 X, Y 是赋范线性空间，D 是 X 的子空间，T: $D \to Y$ 是线性算子，则下列条件等价：

(1) T 是有界算子；

(2) T 是连续算子；

(3) T 在某点 $x_0 \in X$ 连续.

由此知，非有界算子是很容易确定的.

设 X, Y 都是赋范线性空间，D 是 X 的子空间，T: $D \to Y$ 是有界线性算子，则使 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ 对一切 x 成立的正数 M 的下确界，称为有界线性算子 T 的**范数**，记为 $\|T\|$. 可以证明下列结论成立：

(1) $\forall x \in D, \|Tx\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|$；

(2) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in D}} \|Tx\| = \sup\limits_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \in D}} \|Tx\| = \sup\limits_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

设 X, Y 都是赋范线性空间，从 X 到 Y 内的一切有界线性算子的全体记为 $B(X, Y)$. 在 $B(X, Y)$ 内定义线性运算如下：

(1) $(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x$；

(2) $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$；

则 $B(X, Y)$ 依运算 (1) 和 (2) 组成线性空间，且依上述有界线性算子 T 的范数组成赋范线性空间，在其中依范数收敛为一致收敛.

设 $T, T_n \in B(X, Y)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 若 $\forall x \in X$，

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n x - Tx\| = 0,$$

则称序列 $\{T_n\}$ **强收敛**于 T.

显然，若算子序列 $\{T_n\}$ 依范数收敛于 T，则它也强收敛于 T，反之不然.

定理 5.3 若 Y 是巴拿赫空间，则 $B(X, Y)$ 也是巴拿赫空间.

设 X, Y, Z 都是赋范线性空间，$T_1 \in B(X, Y)$，$T_2 \in B(Y, Z)$，定义 T_1 与 T_2 的乘积 $T_2 T_1$ 为：$T_2 T_1$: $X \to Z$，

$$(T_2 T_1)x = T_2(T_1 x), \quad (x \in X)$$

则 $T_2 T_1$ 将 X 内有界集映为 Z 中有界集，从而 $T_2 T_1$ 也是有界线性

算子. 它具有下列性质:

定理 5.4 设 X,Y,Z,W 都是赋范线性空间,则有

(1)
$$(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1),$$
$$(\alpha T_2)T_1=\alpha(T_2T_1),$$
$$T_2(\alpha T_1)=\alpha(T_2T_1),$$

其中 $T_1\in B(X,Y),T_2\in B(Y,Z),T_3\in B(Z,W),\alpha\in K$.

(2)
$$T_3(T_1+T_2)=T_3T_1+T_3T_2,$$

其中 $T_1,T_2\in B(X,Y)$, $T_3\in B(Y,Z)$.

$$(T_2+T_3)T_1=T_2T_1+T_3T_1,$$

其中 $T_1\in B(X,Y),T_2,T_3\in B(Y,Z)$.

(3)
$$\|T_2T_1\|\leqslant\|T_2\|\cdot\|T_1\|,$$

其中 $T_1\in B(X,Y),T_2\in B(Y,Z)$.

显然,一般说来,$T_1T_2\neq T_2T_1$.

3. 连续线性泛函

在上一段中,若 Y 是 X 的数域 K,则称 T 为 X 上的**泛函**. 同样,可定义**线性泛函**与**有界线性泛函**概念,它们依次是线性算子与有界线性算子的特例. 由于 K 是巴拿赫空间,于是由定理 5.3 知赋范线性空间上的一切有界线性泛函的全体 $B(X,K)$ 也是巴拿赫空间,称为 X 的**共轭空间**,记为 X^*或 X'. 若 $X\neq\{0\}$, 则 X^* 中有足够多的元素,这可由下列哈恩(Hahn)-巴拿赫定理推知.

定理 5.5(哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理) 设 X 是复(实)线性空间,X_0 是 X 的复(实)线性子空间,f_0 是在 X_0 上定义的线性泛函. 又设 $p(x)$ 是 X 上的齐性、次可加泛函,而且在 X_0 上满足 $|f_0(x)|\leqslant p(x)$,则存在定义在 X 上的线性泛函 f,满足:

(1) 当 $x\in X_0$ 时,$f(x)=f_0(x)$;

(2) 对于 X 内一切点 x 有 $|f(x)|\leqslant p(x)$.

系 设 X 为线性空间,$p(x)$ 为 X 上的齐性、次可加泛函, 则对于任意 $x_0\in X$,有 X 上的线性泛函 f,使 $f(x_0)=p(x_0)$,而且对于 X

内一切点 x 有 $|f(x)|\leqslant p(x)$.

定理 5.6 设 X 是赋范线性空间，X_0 是 X 的子空间，f_0 是定义在 X_0 上的有界线性泛函，则 f_0 可以保范地延拓到整个 X 上去，即存在着定义在 X 上的有界线性泛函 f，满足：

(1) 当 $x\in X_0$ 时，$f(x)=f_0(x)$；

(2) $\|f\|_X=\|f_0\|_{X_0}$，这里 $\|f_0\|_{X_0}$ 表示 f_0 作为 X_0 上的有界线性泛函的范数，$\|f\|_X$ 表示 f 在 X 上的范数.

注：若 X 为复空间，则 X_0 必须也为复空间，否则定理 5.5 与定理 5.6 不成立.

系 设 X 是赋范线性空间，则对于任一个 $x_0\in X$，$x_0\neq 0$，必存在定义在 X 上的有界线性泛函 f，使得 $f(x_0)=\|x_0\|$，而且 $\|f\|=1$.

X^* 的共轭空间称为 X 的第二共轭空间，记为 X^{**}. 若 $x\in X$，$f\in X^*$，我们定义 X^* 上的泛函 F_x：$X^*\to K$ 如下：

$$F_x(f)=f(x).\qquad (\forall f\in X^*)$$

于是对于每一个 $x\in X$，必对应于一个 $F_x\in X^{**}$. 这种对应是线性的、等距的，从而是一对一的. 于是除去等距同构不计外，X 可以看作 X^{**} 的子空间. 若 $X=X^{**}$，则称 X 为**自反空间**.

4. 线性泛函分析中的几个重要定理

定理 5.7 (共鸣定理) 设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是定义在 B 空间 X 上、值域在赋范线性空间 Y 内的有界线性算子 $T_\alpha(\alpha\in A)$ 的集. 若对于每一个 $x\in X$，有 $\sup\limits_{\alpha\in A}\{\|T_\alpha x\|\}<\infty$，则数集 $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha\in A}$ 有界.

设 T 是定义在 X 的子空间 D 上、值域在 Y 中的线性算子. 若 T 的图像

$$G_T\triangleq\{(x,T(x))\mid x\in D\}$$

是 $X\times Y$ 的闭子空间，则称 T 为**闭算子**.

定理 5.8 (闭图像定理) 设 X 和 Y 都是 B 空间，T：$X\to Y$ 是闭线性算子，则 T 有界.

设 X 和 Y 都是赋范线性空间，T：$X\to Y$ 是线性算子. 若 T 把

X内的以原点为中心的开球映为 Y 内以原点为中心的开球，则称 T 为**开算子**或**开映射**．显然，此定义与 § 2 定义一致．

定理 5.9（开映射定理） 设 X 和 Y 都是 B 空间，$T: X \to Y$ 是有界线性算子，而且 $TX = Y$，则 T 必为开映射．

注：若 T 是闭算子，而且定义域是整个 X，则定理 5.8 与定理 5.9 等价．

5. 弱*收敛与弱收敛

设 X 是赋范线性空间，$f_0, f_n \in X^*(n=1, 2, \cdots)$．若对于任意 $x \in X$ 都有

$$f_n(x) \to f_0(x) \quad (n \to \infty),$$

则称 f_n **弱*收敛**于 f_0，而称 f_0 为 f_n 的**弱*极限**．

易知，X^* 中的依范数收敛蕴含弱*收敛，反之不真．

设 X 是赋范线性空间，$x_0, x_n \in X(n=1,2,\cdots)$．若对于任意 $f \in X^*$，都有

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad (n \to \infty),$$

则称序列$\{x_n\}$**弱收敛**于 x_0．

易知点列的强收敛蕴含弱收敛，反之不真．

§ 6 内 积 空 间

1. 内积空间的定义及其基本性质

设 X 为复（或实）数域 K 上的线性空间．若对于任意 $x, y \in X$，总对应于数$(x, y) \in K$，满足下列条件：

(1) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z) \quad (\forall z \in X)$；

(2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\forall \alpha \in K)$；

(3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$；

(4) $(x, x) \geqslant 0$，而且$(x, x) = 0$ 的充要条件为 $x = 0$；

则称 X 为复（或实）内积空间，简称**内积空间**，而称 (x, y) 为 x 与 y

的**内积**. 这里$\overline{(y,x)}$表示(y,x)的共轭复数.

由内积定义易知:

(1) $(x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1(x,y_1)+\alpha_2(x,y_2)$, 当 $K=\mathrm{R}$ 时;

$(x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\bar{\alpha}_1(x,y_1)+\bar{\alpha}_2(x,y_2)$, 当 $K=\mathrm{C}$ 时;

(2) 当 x,y 中有一个为 0 时, $(x,y)=0$;

(3) $\forall x\in X$, 令$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, 则X按$\|\cdot\|$成为赋范线性空间, 而$\|\cdot\|$称为由内积确定的范数. 若X作为赋范线性空间是完备的, 则称X为**希尔伯特**(Hilbert)**空间**. 若X不是完备的内积空间, 则可依赋范线性空间完备化得X_0, 使X_0成为希尔伯特空间;

(4) $|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$;

(5) 内积(x,y)是x,y的连续函数;

(6) 内积与范数有下列基本关系:

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2), \text{ 当 } K=\mathrm{R} \text{ 时};$$

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2), \text{ 当 } K=\mathrm{C} \text{ 时}.$$

由(3)可知内积空间必为赋范线性空间, 反之不成立. 易知, 赋范线性空间成为内积空间的充要条件是下列中线公式成立:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

2. 内积空间中的正交性

设X为内积空间, $x,y\in X$. 若$(x,y)=0$, 则称x与y**正交**, 记为$x\perp y$. 设$M\subset X$, 若$\forall y\in M$, 都有$(x,y)=0$, 则称x与M正交, 记为$x\perp M$. 若又有$N\subset X$, 而且$\forall x\in N$, 都有$x\perp M$, 则称集M与集N正交, 记为$M\perp N$. X中与M正交的全体元素称为M的**正交补**, 记为$M^{\perp}$.

正交性有下列初等性质:

定理 6.1 (1) 设$x_1\perp x_2$, 则

$$\|x_1+x_2\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2;$$

(2) 设 $x\in X$，L 在 X 内稠密，而且 $x\perp L$，则 $x=0$；

(3) 对任意 $M\subset X$，$M^{\perp}$ 是 X 的闭子空间.

定理 6.2（正交分解） 设 X 为希尔伯特空间，M 是 X 的闭子空间，则对于任意的 $x\in X$，可作下列唯一的正交分解：$x=x_0+y$，其中 $x_0\in M$，$y\in M^{\perp}$.

内积空间中的非零元素集 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$，若有

$$(e_\alpha,e_\beta)=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta\\ 1, & \alpha=\beta\end{cases}$$

则称 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 中的**标准正交系**. 对于任意 $x\in X$，称 $c_\alpha=(x,e_\alpha)$ 为 x 关于 e_α 的**傅里叶(Fourier)系数**.

定理 6.3（贝塞尔 (Bessel) 不等式） 设 $\mathscr{F}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，则对于每一个 $x\in X$，x 的傅里叶系数 $\{(x,e_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ 中最多只有可数个不为零，而且适合贝塞尔不等式：

$$\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|\leqslant\|x\|^2.$$

设 $\{e_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 是 X 中的标准正交系. 如果对于任意 $x\in X$，成立巴赛瓦尔(Parseval)等式：

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2,$$

则称此正交系在 X 内是**完备正交系**，这里求和式中也可能只有有限项.

关于巴赛瓦尔等式有下列结果：

定理 6.4 (1) 对于每一个 $x\in X$，巴赛瓦尔等式成立的充要条件是：在依范数收敛意义下，x 可以展成傅立叶级数

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n.$$

(2) 设$\{e_n\}$是X中的标准正交系，则$\{e_n\}$完备的充要条件是$\{e_n\}$张成的子空间在X中稠密.

(3) 若$x, y \in X$关于$\{e_n\}$的巴赛瓦尔等式都成立，则

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)}.$$

(4) 黎斯-费歇尔(Riesz-Fisher)定理　设X是希尔伯特空间，$\{e_n\}$是X中的标准正交系，而且数列$\{c_n\} \in l^2$，则存在着唯一元素$x \in X$，使得$c_n = (x, e_n)$，而且巴赛瓦尔等式成立.

(5) 若X中存在着完备的标准正交系，则X是可分的.

设X为内积空间，M为X中的标准正交系，如果$M^{\perp} = \{0\}$，则称M是**完全的标准正交系**.

定理 6.5　设M是内积空间X中的标准正交系. 若M是完备的，则它是完全的. 如果X是希尔伯特空间，则完全的标准正交系必是完备的.

设X_1和X_2是两个内积空间. 若存在双射：φ: $X_1 \longrightarrow X_2$，而且保持线性运算及内积，即$\forall x_1, y_1 \in X_1, \alpha, \beta \in K$，都有：

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(y_1),$$

$$(\varphi(x_1), \varphi(y_1))_2 = (x_1, y_1)_1,$$

其中$(x, y)_j$表示X_j中的内积$(j = 1, 2)$，则称空间X_1与X_2**同构**.

定理 6.6　任何n维内积空间X都和n维欧几里德空间$\mathbb{R}^n$同构，而且任何可分的希尔伯特空间必和$\mathbb{R}^n$或l^2同构.

定理 6.7 (黎斯定理)　设X是希尔伯特空间，f是X上的连续线性泛函，则存在元素$y \in X$，使得对于任意$x \in X$，都有

$$f(x) = (x, y).$$

第一章　拓扑线性空间

在泛函分析的早期历史中，主要研究赋范线性空间，即范数（最多是一个“半范数”）是研究泛函分析的主要工具．而实际上有关拓扑的概念是借助于距离引进的，但是很快弗雷希(Fréchet)就发现数学分析中有些极限概念并不能用距离来描述，如点态收敛就是一例．

设X是任意集，$R(X)$表示X上定义的实函数全体．又设序列$\{f_n\}_{n\in N}\subset R(X)$，$f\in R(X)$，而且对一切$x\in X$，总有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

则称函数列$\{f_n\}$在X上点态收敛于f．当X是有限集或可列集时，这种概念可以纳入度量空间中收敛的范畴．例如设$X=\{x_n\}_{n\in N}$，当$f,g\in R(X)$时，规定

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|},$$

则$(R(X),\rho)$是一个度量空间，而且点态收敛等价于依距离ρ收敛．然而当X是不可数集时，就无法定义$R(X)$中的距离$\rho(f,g)$，使上述两种收敛等价．因此，需要沿别的途径来建立比度量空间更一般的理论．早在1926年，弗雷希就注意到元素的加法运算与数乘运算的连续性，而连续性是可以用邻域刻画的，即可以将代数结构与拓扑结构最大限度地结合起来进行研究，这就产生了拓扑线性空间概念．于是，拓扑线性空间成了泛函分析的基础，它在广义函数论中有巨大影响．广义函数必须用拓扑线性空间，特别

是局部凸拓扑线性空间的理论来表述，而赋范线性空间对它完全无能为力. 因此，我们在§1内先引入拓扑线性空间概念，主要定理是定理1.4到定理1.7. §2讨论局部凸拓扑线性空间的充要条件. §3到§8为本章主要内容. §3定义赋可列范空间概念，讨论了它的拓扑结构. §4定义拓扑线性空间上的连续线性泛函和一些充要条件，涉及到广义函数的存在问题. §5讨论弱拓扑，为广义函数概念的引入作准备. 这三节是基础. §6介绍一种特殊的拓扑线性空间——完全空间以及从区间到完全空间内的抽象函数的积分. 最后，§7定义拓扑线性定间的归纳极限与可数并，作为以后研究广义函数论的基础，并指出推广可数并空间到任意并空间的方法.

§1　拓扑线性空间的概念

1. 定义

我们知道，赋范线性空间X中的线性运算关于X中的范数拓扑是连续的(见第0章第5节). 这时我们也说X中的线性结构与拓扑结构相容或协调. 赋范线性空间的这种性质在赋范线性空间的研究中起着很重要的作用，我们希望这种性质能在更一般的拓扑空间内最大限度地结合起来，于是产生了拓扑线性空间概念.

定义1.1　设

(1) X是数域K(实数域$\mathbb{R}$或复数域$\mathbb{C}$)上的线性空间；

(2) X是拓扑空间；

(3) X上的线性结构与拓扑结构相容，即$\forall x,y\in X$和$\forall U_{x+y}$，$\exists U_x$和U_y，使得$U_x+U_y\subset U_{x+y}$，而且$\forall \lambda\in K$，$\forall x\in X$和$\forall U_{\lambda x}$，$\exists \delta>0$与U_x，使得$|\mu-\lambda|<\delta$时，有$\mu U_x\subset U_{\lambda x}$；

则称X为**拓扑线性空间**，简记为TLS(Topological linear space)，其中$\mu\in K$；U_x表示点x的邻域，U_{x+y}，$U_{\lambda x}$，U_y意义相仿；μU_x表示

数 μ 与 U_x 内的一切点的乘积的全体，显然它也是点 μx 的邻域（定理 1.1 之(2)）；U_x+U_y 表示 U_x 内一切点与 U_y 内一切点的和的全体。

注：许多作者赋予 X 以 T_1 或 T_2 型分离拓扑结构，定理1.5将证明，对于拓扑线性空间 X 而言，赋以 T_0 型拓扑结构与赋以 T_3 型拓扑结构是等价的，所以也可赋以 T_0 型到 T_3 型的任一分离性. 从分析意义上来说，由于 T_2 空间中极限唯一，加上分离性条件具有较大实用价值.

若 X 是拓扑线性空间，A 是它的线性子空间，则把 X 中的拓扑运算与代数运算诱导到 A 上得到的也是拓扑线性空间，称为 X 的**子空间**.

2. 基本性质

定理1.1 设 X 是拓扑线性空间，则

(1) $\forall x_0\in X$，位移映射 τ_1: $x\mapsto x+x_0$ 是 X 到 X 上的同胚. 特别，若 $\mathscr{U}_0$ 是零元素的邻域基，则 $x_0+\mathscr{U}_0$ 为元素 x_0 的邻域基(齐性).

(2) $\forall \lambda_0\neq 0, \lambda_0\in K$，映射 τ_2: $x\mapsto \lambda_0 x$ 也是 X 到 X 上的同胚. 于是，$A\subset X$ 有某一拓扑性质时，$\lambda_0 A$ 亦然. 特别，若 U_x 是 x 的一个邻域，则 $\lambda_0 U_x$ 是 $\lambda_0 x$ 的一个邻域.

证：只须证明对于上述 x_0 和 $\lambda_0\neq 0$，映射

$$\tau:\ x\mapsto y=\lambda_0 x+x_0$$

是从 X 到 X 上的同胚即可. 由定义 1.1，$\tau(x)=\lambda_0 x+x_0$ 显然是双射且连续. 另一方面，$x=\tau^{-1}(y)=\lambda_0^{-1}(y-x_0)$ 也连续，所以 τ 为同胚. □

例 1.1 设 Ω 是任意集，$x(t)$ 是在 Ω 上定义而在数域 K 中取值的函数，按如下通常函数的加法与数乘

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\quad (\alpha x)(t)=\alpha x(t),$$

其中 $t\in\Omega$，组成一个 K 上的线性空间，记为 X. 点 $x_0\in X$ 的一个邻

域基由一切如下的邻域组成：

$$U(x_0; t_1, t_2, \cdots, t_n; \varepsilon)$$
$$\triangleq \{x(t) \mid |x(t_i) - x_0(t_i)| < \varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

这里 $t_i \in \Omega, n \in \mathrm{N}, \varepsilon > 0$. 因为

$$U(x_0; t_1, \cdots, t_n; \varepsilon/2) + U(y_0; t_1, \cdots, t_n; \varepsilon/2)$$
$$\subset U(x_0 + y_0; t_1, \cdots, t_n; \varepsilon),$$
$$U\left(x_0; t_1, \cdots, t_n; \frac{\varepsilon}{2(|\alpha_0| + 1)}\right)$$
$$\times \left\{\alpha \;\Big|\; |\alpha - \alpha_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_0(t_i)| + 1)}\right\}$$
$$\subset U(\alpha_0 x_0; t_1, \cdots, t_n; \varepsilon),$$

所以 X 是一个拓扑线性空间. 这里 $A + B$ 表示 X 的子集 A 的一切元素与 X 的子集 B 的一切元素的和所成之集，$A \times \Lambda$ 表示 X 的子集 A 的一切元素与数域 K 的子集 Λ 的一切元素的数积所成之集.

例 1.2 设 $E = \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是线性空间 A_n 的笛卡儿乘积，即 E 是元素列 $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ 的全体，这里 $x_n \in A_n (n = 1, 2, \cdots)$. 令 R_n 表示元素的等价关系：

$$x \sim y(R_n) \Longleftrightarrow x_k = y_k (1 \leqslant k \leqslant n),$$

这里 $x = \{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}, y = \{y_n\}_{n \in \mathrm{N}}$.

我们定义距离如下：

$$\rho_n(x, y) = \begin{cases} 0, & x \sim y(R_n) \\ \dfrac{1}{n+1}, & x \nsim y(R_n) \end{cases}$$

$$\rho(x, y) = \max_n \rho_n(x, y),\quad x, y \in E.$$

不难验证，$\rho(x, y)$ 是距离，而且三角形不等式取加强的形式：

$$\rho(x, z) \leqslant \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

又 E 是线性空间，但它不是拓扑线性空间．事实上，令 $x=(1, 1, \cdots)$，则

$$\frac{1}{n}x=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots\right),$$

从而 $\rho\left(0, \frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，但 $\frac{1}{n}x\nrightarrow 0$，所以 $(x,\alpha)\mapsto \alpha x$ 不是连续映射。

3. 拓扑线性空间的判定条件

前面给出了拓扑线性空间的定义，但在实用中有时并不方便，因此需要给出一些判定条件．为此，先介绍吸收集、均衡集和凸集的概念．

定义 1.2 设 X 是数域 K 上的线性空间，$A\subset X$．若 $\forall x_0\in X$，$\exists\delta>0$，使得当 $|\lambda|<\delta(\lambda\in K)$ 时都有 $\lambda x_0\in A$，则称 A 是**吸收集**，即 A 包含域 K 所有"各方向"以 0 为端点、由 x_0 决定的某一线段．

若 $|\alpha|\leqslant 1(\alpha\in K)\Longrightarrow\alpha A\subset A$，则 A 称为**均衡集**或**平衡集**，也称**圆集**．特别，当 $|\alpha|=1\Longrightarrow\alpha A\subset A$ 时，A 称为**圆周集**．这是对称集 $-A\subset A$ 的自然推广．

易知，均衡集的闭包仍为均衡集．

定义 1.3 设 X 是数域 K 上的线性空间，$A\subset X$．若 $\forall x, y\in A$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1\Longrightarrow\alpha x+(1-\alpha)y\in A$，则称 A 为**凸集**．

若 $\forall x,y\in A$，$\forall\lambda,\mu\in K$，当 $|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$ 时，有 $\lambda x+\mu y\in A$，则称 A 为**绝对凸集**．

注 1：均衡集未必是凸集，例如在二维复空间 C^2 中，令

$$B=\{(z_1,0)\ |\ |z|\leqslant 1\}\cup\{(0, z_2)\ |\ |z_2|\leqslant 1\},$$

则 B 显然是均衡的．然而

$$\alpha(0,z_2)+(1-\alpha)(z_1,0)=((1-\alpha)z_1,\alpha z_2)\overline{\in} B,$$

所以 B 不是凸集．有意思的是在一维复空间 C 中非凸的均衡集却作不出来，事实上，C 内的均衡集必为凸集．

注 2：线性空间中的吸收集、均衡集和绝对凸集都与数域 K 有关.

例 1.3（沙茨(Schatz)苹果） 设复平面 C 中子集

$$A \triangleq \{z \mid |z \pm 1| \leqslant 1\} \cup \{z \mid \operatorname{Re} z = 0, |\operatorname{Im} z| \leqslant 1\},$$

则将 C 看作 R 上的线性空间时，A 为吸收集（因为它的图形关于原点对称，对于任取点 a 不在 y 轴上，线段 $\overline{Oa}$ 必与圆交于两点，于是存在 $\delta > 0$，将长小于 δ 的线段移于 A 内），而且 A 为均衡集. 而将 C 看作复数域 C 上的线性空间时，A 不是吸收集（这时 C 的一切方向是位于平面内的小圆，其中总有不属于 A 的点）. 同时可知，当 $K = \mathbf{R}$ 时，吸收的均衡集未必是凸集.

定理 1.2 集 A 是绝对凸集的充要条件为：它同时是均衡集和凸集.

证：必要性显然. 只证充分性. 设 A 为均衡凸集，则 $\forall x, y \in A$，及 $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$ 时，若 $\lambda = 0$ 或 $\mu = 0$，则显然有 $\lambda x + \mu y \in A$；若 λ, μ 都不为 0，则 $\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in A$，$\frac{\mu}{|\mu|} y \in A$，而且

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1,$$

所以

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|)\left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\lambda x}{|\lambda|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\mu y}{|\mu|}\right) \in A. \quad \square$$

定理 1.3 设 X 为拓扑线性空间，则下列运算法则成立：

(1) $\overline{x + A} = x + \overline{A}$，$\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$，其中 $x \in X, A \subset X, \lambda \neq 0$. 特别，当 A 是闭集时，$x + A, \lambda A$ 亦然.

(2) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$，但 $\overline{A} + \overline{B}$ 未必是闭集.

(3) 若 C 是紧集，F 是闭集，则 $C + F$ 为闭集，而且

$$\overline{C + F} = \overline{C} + F,$$

(4) 若 C_1, C_2 为紧集，则笛卡儿乘积 $C_1 \times C_2$ 亦然.

(5) 若 G 是开集，则对于任意 $A \subset X$，$A+G$ 为开集，从而

$$A + B^{\circ} \subset (A+B)^{\circ}.$$

证明留作练习.

定理 1.4 设 X 为拓扑线性空间，则必有零元素的邻域基 $\mathscr{U}_0$ 满足下列条件：

(1) 对于任意的 $U_1, U_2 \in \mathscr{U}_0$，$\exists U_3 \in \mathscr{U}_0$，使得 $U_3 \subset U_1 \cap U_2$；

(2) 一切 $U \in \mathscr{U}_0$ 是吸收集；

(3) 一切 $U \in \mathscr{U}_0$ 是均衡集；

(4) $\forall U \in \mathscr{U}_0$，$\exists V \in \mathscr{U}_0$ 使得 $V+V \subset U$.

反之，若 X 是线性空间，在其中引进满足条件(1)～(4)的子集族 $\mathscr{U}_0$，则 $\forall x \in X$，把形式为 $x+U(U \in \mathscr{U}_0)$ 的集作为 x 的邻域，就使 X 成为拓扑线性空间，其中 $\mathscr{U}_0$ 是零元素的邻域基.

证：必要性. 设 $\mathscr{U}_0$ 是零元素 0 的邻域基，则由邻域性质知(1)成立. 再由加法的连续性及 $0+0=0$ 知(4)成立. 又由 $0 \cdot x = 0$，于是 $\forall V \in \mathscr{U}_0$，$\exists \delta > 0$ 和 V_x，使得 $|\lambda| \leqslant \delta$ 时有 $\lambda V_x \subset V$，所以(2)也成立. 下边证明(3)成立. 事实上，设 V 是 0 的任意邻域，由 $0 \cdot 0 = 0$ 知存在 $V_1 \in \mathscr{U}_0$ 及 $\delta > 0$，使得 $|\lambda| \leqslant \delta$ 时有 $\lambda V_1 \subset V$. 因为 V_1 未必是均衡的，于是令 $V_0 = \bigcup\limits_{|\lambda| \leqslant \delta} \lambda V_1$，则 $V_0 \subset V_1$. 又因 $\delta V_1 \subset V_0$，而 δV_1 也是 0 的邻域，所以 V_0 也是 0 的邻域，从而当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时有

$$\alpha V_0 = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \delta} \alpha \lambda V_1 \subset \bigcup_{|\lambda'| \leqslant \delta} \lambda' V_1 = V_0,$$

其中 $\lambda' = \alpha\lambda$ 而且 $|\alpha\lambda| = |\alpha| \cdot |\lambda| \leqslant \delta$. 再由 $V_0 \subset V$，知 $\mathscr{U}_0$ 为 0 的均衡邻域基.

充分性. 由定理条件可确定 X 内任一点 x 的邻域，使 X 成为拓扑空间. 为此，由第 0 章定理 2.1，只须证它满足下列条件：

(1) 点 x 的每一个邻域包含点 x. 事实上，由条件(3)，任意邻域 $V\in\mathscr{U}_0$ 都是均衡的，所以 $0\in V$，于是 $x=x+0\in x+V$.

(2) 点 x 的两个邻域的交包含这一点的第三个邻域. 事实上，设二邻域为 $x+V_1$ 和 $x+V_2$，则由条件(1)，$\exists V_3\in\mathscr{U}_0$，使得 $V_3\subset V_1\cap V_2$，因此

$$(x+V_3)\subset(x+V_1)\cap(x+V_2).$$

(3) 对于 x 的任一邻域 V_x，存在同一点的邻域 U_x，使得 V_x 包含 U_x 的任一点的邻域.

只须证 $x=0$ 的情形. 任取 $V_0\in\mathscr{U}_0$，由条件(4)，存在 $V\in\mathscr{U}_0$，使得 $V+V\subset V_0$. 于是，$y\in V$ 时，$y+V$ 是 y 点的邻域，而且

$$y+V\subset V+V\subset V_0.$$

因此，X 是拓扑空间. 下边证明加法与数乘的连续性.

加法的连续性：任取 $x, y\in X$，只须证 $\forall U_{x+y}$，$\exists U_x$ 及 U_y，使得 $U_x+U_y\subset U_{x+y}$. 由定理的条件知存在 $U\in\mathscr{U}_0$，使得 $U_{x+y}=x+y+U$. 再由条件(4)知存在 $V\in\mathscr{U}_0$，使得 $V+V\subset U$，从而

$$(x+V)+(y+V)=x+y+V+V\subset x+y+U.$$

于是取 $U_x=x+V, U_y=y+V$ 即可.

数乘的连续性：首先，由于对任一 $A\subset X$ 有 $2A\subset A+A$，于是由条件(4)，对于每一个 $V\in\mathscr{U}_0$，必有 $\tilde{V}\in\mathscr{U}_0$，使得 $2\tilde{V}\subset A$. 类似地，$\forall n\in\mathrm{N}$，存在 $V^{(n)}\in\mathscr{U}_0$，使得 $2^nV^{(n)}\subset V$. 设 λ 是任一数，则存在 $n\in\mathrm{N}$，使得 $|\lambda|\leqslant 2^n$. 因为 $V^{(n)}$ 是均衡集，所以 $2^nV^{(n)}$ 亦然，因此

$$\lambda V^{(n)}=\frac{\lambda}{2^n}(2^nV^{(n)})\subset 2^nV^{(n)}\subset V.$$

现在证连续性. 设 $x\in X, \lambda\in K$，则

$$\begin{aligned}\mu y-\lambda x&=(\mu-\lambda)(y-x)+(\mu-\lambda)x+\lambda(y-x)\\&\to 0\ (\mu\to\lambda, y\to x).\end{aligned}$$

由条件(4)推出的上述结论知，只须证下列三个事实：

(1) $\forall V\in\mathscr{U}_0$, $\exists V_1\in\mathscr{U}_0$ 及 $\delta>0$, 使得 $\alpha V_1\subset V(|\alpha|\leqslant\delta)$. 由于 V 是均衡集，取 $\delta=1$, $V_1=V$ 即可.

(2) $\forall V\in\mathscr{U}_0$, $\exists\delta>0$, 使得 $|\alpha|\leqslant\delta$ 时有 $\alpha x\in V$. 事实上，由于 V 是吸收集，因此存在 $\lambda'>0$, 使得 $x\in\lambda'V$. 令 $\delta=1/\lambda'$, 则当 $|\alpha|\leqslant\delta$ 时，由 $|\alpha\lambda'|=|\alpha|/\delta\leqslant1$, 所以 $\alpha(\lambda'V)=(\alpha\lambda')V\subset V$, 从而

$$\alpha x\in V\quad(|\alpha|\leqslant\delta).$$

(3) $\forall V\in\mathscr{U}_0$ 和 $\forall\lambda\in K$, $\exists V_1\in\mathscr{U}_0$, 使得 $\lambda V_1\subset V$. 事实上，由数乘连续性的开始所证知此结论成立.

综上所述，即得 $\mu y-\lambda x\in V+V+V\subset V$. □

系 设 $\mathscr{U}_0$ 是拓扑线性空间 X 内零点的邻域基，则 X 为 T_2 空间的充要条件是：$\bigcap\limits_{V\in\mathscr{U}_0}V=\{0\}$.

证： 必要性. 由邻域性质，$0\in V(\forall V\in\mathscr{U}_0)$. 另一方面，若 $x\neq0$, 则必有 $V\in\mathscr{U}_0$, 使得 $x\bar{\in}V$, 于是 $x\bar{\in}\bigcap\limits_{V\in\mathscr{U}_0}V$, 所以等式成立.

充分性. 若等式成立，而且 $x\neq y$, 则 $\exists V\in\mathscr{U}_0$, 使得 $x-y\bar{\in}V$. 由定理 1.4 知必有均衡邻域 U, 使得 $U+U\subset V$, 则 $x+U$ 与 $y+U$ 为 x, y 的不相交邻域. 事实上，若

$$z\in(x+U)\cap(y+U),$$

则
$$x-y=(z-y)-(z-x)\in U-U=U+U\subset V.$$

所以 X 是 T_2 空间. □

注：定理中条件 $x+U$ 为 x 的邻域必须存在. 例如在复平面 $\mathbf{C}$ 上定义拓扑：开集族为以原点为中心的一切开的同心圆，则线性空间满足条件(1)～(4)，但不满足加法连续性. 事实上，任取数 $p\neq0$, 则 $p+(-p)=0$, 于是取任一半径小于 $|p|$ 的开圆 U_0, 就找不到 p 与 $(-p)$ 的邻域(包含 p 与 $(-p)$ 的同心开圆)，使它们的和含于 U_0 内.

定理 1.5 若 X 为拓扑线性空间，而且满足 T_0 分离公理，则 X 必为 T_3 空间.

证： 分三步. (1) 任取零元素的开邻域组 $\mathscr{U}_0$，则 $\forall U\in\mathscr{U}_0$，必有 $V\in\mathscr{U}_0$，使得 $\bar{V}\subset U$. 事实上，由定理 1.4 之条件 (4) 知 $\forall U\in\mathscr{U}_0$，$\exists V\in\mathscr{U}_0$，使得 $V+V\subset U$. 而由定义知

$$\forall x\in\bar{V}\iff(x+W)\cap V\neq\varnothing,$$

这里 W 取 $\mathscr{U}_0$ 的所有元素. 于是

$$x\in\bar{V}\iff x\in(V-W)\quad(\forall W\in\mathscr{U}_0)$$

$$\iff x\in\bigcap_{W\in\mathscr{U}_0}(V-W)=\bigcap_{W\in\mathscr{U}_0}(V+W)$$

$$\subset V+V\subset U.$$

所以 $\bar{V}\subset U$.

(2) X 满足 T_1 分离公理. 事实上，任取 x，$y\in X$，而且 $x\neq y$，由 T_0 分离公理，存在开的 $V\in\mathscr{U}_0$，使得 $y-x\notin V$，于是 $y\notin x+V$. 令 $G=y-V$，则 G 为包含点 y 的开集. 由 V 的取法知 $x\notin G$，否则必有 $y\in x+V$，矛盾. 由 x，y 的对称性即得 X 满足 T_1 分离公理.

(3) X 为 T_3 空间. 事实上，任取闭集 $F\subset X$ 和 $x\in X\backslash F$，则 F 的余集 F^c 必为 x 的一个邻域. 令 $F^c=x+U(U\in\mathscr{U}_0)$. 由(1)知存在开邻域 $V\in\mathscr{U}_0$，使得 $x+\bar{V}\subset F^c$，于是由定理 1.3 的 (1) 得 $\overline{x+V}\subset F^c$，而且 $G_1\triangleq x+V$ 为开集. 再令 $G_2=((\overline{x+V}))^c$，则 $F\subset G_2$，而且 $G_1\cap G_2=\varnothing$. 由于 $x\in G_1$，所以 x 和 F 被邻域 G_1 与 G_2 分离. 再由(2)知 X 为 T_1 空间，因此 X 为 T_3 空间. □

由(1)的证明知：

系 1 $\forall A\subset X$，$\bar{A}=\bigcap_{V\in\mathscr{U}_0}(A+V)$.

系 2 设 X 为拓扑线性空间，则 X 必有由（吸收的）闭的均衡集所组成的邻域基.

证：由定理1.5的证(1)知，$\forall V\in\mathscr{U}_0$，$\exists U\in\mathscr{U}_0$，使得$\bar{U}\subset V$，取$\{\bar{U}\}$即可. □

由于具T_2型拓扑的拓扑线性空间在实用中的重要性，我们再给出它的两个充要条件.

定理1.6 为使数域K上的线性空间X是具T_2型拓扑的拓扑线性空间，必须而且只须X中有一组子集$\mathscr{B}$满足下列条件：

(1) $\forall V\in\mathscr{B}$，$0\in V$；

(2) 若$U,V\in\mathscr{B}$，则存在$W\in\mathscr{B}$，使得$W\subset U\cap V$；

(3) 若$x\neq 0$，则存在$V\in\mathscr{B}$，使得$x\overline{\in}V$；

(4) $\forall V\in\mathscr{B}$，$\exists W\in\mathscr{B}$，使得$W+W\subset V$；

(5) $\forall V\in\mathscr{B}$，$\forall x\in V$，存在$U\in\mathscr{B}$，使得$x+U\subset V$；

(6) $\forall V\in\mathscr{B}$，$\lambda\neq 0$，存在$U\in\mathscr{B}$，使得$\lambda U\subset V$；

(7) $\forall V\in\mathscr{B}$和任意$x\in X$，存在正数ε，使得当$|\lambda|<\varepsilon$时，有$\lambda x\in V$；

(8) $\forall V\in\mathscr{B}$，存在正数ε，使得$|\lambda|<\varepsilon$时，$\lambda V\subset V$.

这时X的拓扑取$\{x+U\mid U\in\mathscr{B}\}(x\in X)$作点$x$的邻域基.

证：必要性.

设X是具T_2型拓扑的拓扑线性空间，令$\mathscr{B}$表示零元素的开邻域基，则有

(1) $\forall V\in\mathscr{U}$，由邻域性质知$0\in V$.

(2) $\forall U,V\in\mathscr{B}$，由邻域性质知$U\cap V$是0的邻域. 由邻域基定义，必有$W\in\mathscr{B}$，使得$W\subset U\cap V$.

(3) 若$x\neq 0$，由于X是T_2型的，从而为T_0型的，所以存在零点的邻域W，使得$x\overline{\in}W$. 又由于$\mathscr{B}$是零点的邻域基，所以有$V\in\mathscr{B}$，使得$V\subset W$，从而$x\overline{\in}V$.

(4) $\forall V\in\mathscr{B}$，由$0+0=0$和加法连续性知，$\exists U_1\in\mathscr{B}$，$U_2\in\mathscr{B}$，使得$U_1+U_2\subset V$. 令$U_3=U_1\cap U_2$，则$U_3$是零点的邻域，于是存在$W\in\mathscr{B}$，使得$W\subset U_3$，而且

$$W+W\subset U_3+U_3\subset U_1+U_2\subset V.$$

(5) $\forall V\in\mathscr{B}$和$\forall x\in V$,由于x是V的内点，于是V也是x的邻域,但$x+0=x$,而且加法映射$x\mapsto x+y$在$y=0$连续，所以存在零点的邻域U_1,使得$x+U_1\subset V$.由邻域基定义,存在$U\in\mathscr{B}$,使得$U\subset U_1$,所以$x+U\subset x+U_1\subset V$.

(6) $\forall V\in\mathscr{B}$和$\lambda\neq 0$,由于数乘是同胚,$\frac{1}{\lambda}V$也是零点的邻域,于是存在$U\in\mathscr{B}$,使得$U\subset\frac{1}{\lambda}V$,即$\lambda U\subset V$.

(7) $\forall x\in X$,因为λx在$x=0$连续，于是$\forall V\in\mathscr{B}$和$\varepsilon>0$,使得$|\lambda|<\varepsilon$时$\lambda x\in V$.

(8) $\forall V\in\mathscr{B}$,由定理 1.4,可用均衡邻域代替V,仍用V表示,于是由均衡邻域的定义,取$\varepsilon=1$,则有$|\lambda|<\varepsilon$时$\lambda V\subset V$.

充分性.

设X的子集组满足条件(1)～(8).令

$$\mathscr{B}(x)=\{x+V\mid x\in X,V\in\mathscr{B}\}.$$

首先,仿定理 1.4 充分性的证明知$\mathscr{B}(x)$使X成为拓扑空间.下面证明$\mathscr{B}(x)$确定T_2型拓扑.若$x\neq y$,则由条件(3),$\exists U\in\mathscr{B}$,使得$x-y\notin U$,于是由条件(4),$\exists V\in\mathscr{B}$,使得$V+V\subset U$.不妨取V为均衡的,于是x的邻域$x+V$与y的邻域$y+V$不相交.事实上,若$z\in(x+V)\cap(y+V)$,则

$$x-y=(z-y)-(z-x)\in V-V=V+V\subset U,$$

矛盾.于是X满足T_2分离公理.由于拓扑线性空间内的拓扑由零点的邻域组唯一确定,因此我们断定,空间X内由$\mathscr{B}$所决定的拓扑是唯一的.

其次证明加法的连续性.事实上,任取$V\in\mathscr{B}(x+y)$,必有$U\in\mathscr{B}$,使得$V=x+y+U$.由条件(4),存在$W\in\mathscr{B}$,使得$W+W\subset U$,于是

$$(x+W)+(y+W)\subset x+y+U=V.$$

即 x 点的邻域 $x+W$ 与 y 点的邻域 $y+W$ 的和包含于 V.

再其次证明数乘的连续性. 若 $y=\lambda_0 x_0$, 则对于每一个 $V_y\in\mathscr{B}(y)$, 必有 $\varepsilon>0$ 与 $U_{x_0}\in\mathscr{B}(x_0)$, 使得 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ 时, $\lambda U_{x_0}\subset V_y$. 设 $V_y=y+V\,(V\in\mathscr{B})$, 分两种情形来证.

(i) $\lambda_0\neq 0$, 则重复利用条件(4), 有 $W\in\mathscr{B}$, 使得 $W+W+W\subset V$. 再由条件(6)知存在 $W_1\in\mathscr{B}$, 使 $\lambda_0 W_1\subset W$. 然后由条件(7)知存在 $\varepsilon_1>0$, 使得 $|\delta|<\varepsilon_1$ 时有 $\delta x_0\in W$. 再由条件(8), 有 $\varepsilon_2>0$, 使得 $|\delta|<|\lambda_0|\varepsilon_2$ 时, $\dfrac{\delta}{\lambda_0}W\subset W$. 取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, 则当 $|\delta|<\varepsilon$ 时, 有 $\delta x_0\in W$, 及 $\left|\dfrac{\delta}{\lambda_0}\right|<\varepsilon$ 时有 $\dfrac{\delta}{\lambda_0}W\subset W$, 于是邻域 $U_{x_0}\triangleq x_0+W_1$ 及 ε 即为所求. 事实上, 若 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, 令 $\lambda=\lambda_0+\delta$, 则 $|\delta|<\varepsilon$. 若 $x\in x_0+W_1$, 令 $x=x_0+W$, 则 $W\subset W_1$, 因此

$$\lambda x=(\lambda_0+\delta)(x_0+W)=\lambda_0 x_0+\lambda_0 W+\delta x_0+\delta W,$$

但是 $y=\lambda_0 x_0$, 而 $\lambda_0 W\subset\lambda_0 W_1\subset W$, $\delta x_0\in W$, 和 $\delta W=\dfrac{\delta}{\lambda_0}\lambda_0 W\subset\dfrac{\delta}{\lambda_0}W\subset W$, 所以当 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ 及 $x\in U_{x_0}$ 时有

$$\lambda x\in y+W+W+W\subset y+V=V_y.$$

(ii) $\lambda_0=0$, 则问题转化为 $\forall V\in\mathscr{B}$, $\exists\,\varepsilon>0$ 和 $U_{x_0}=x_0+U$, 使得 $|\delta|<\varepsilon$, $y\in U_{x_0}$ 时, $\delta y\in V$. 由条件(4), $\exists\,U\in\mathscr{B}$, 使得 $U+U\subset V$, 仿(i)由条件(7)和(8)知 $\exists\,\varepsilon>0$, 使得 $|\delta|<\varepsilon$ 时, $\delta x_0\in U$, 而且 $\delta U\subset U$, 于是当 $|\delta|<\varepsilon$ 而且 $y\in U_{x_0}$ 时有

$$\delta y=\delta x_0+\delta(y-x_0)\in U+\delta U\subset U+U\subset V.\quad\square$$

注: 条件(1)～(8)并不是独立的, 而且能简化为较少的几个条件. 然而总存在着满足条件(1)～(8)的零点的邻域组. 条件(1)～(7)对于一切零点邻域基成立, 而条件(8)对均衡的零点邻域基成立.

定理1.7 为使数域K上的线性空间X是T_2型的拓扑线性空间，必须而且只须X内有一组子集$\mathscr{U}_0=\{U\}$满足下列条件：

(1) $\bigcap\limits_{U\in\mathscr{U}_0} U=\{0\}$；

(2) $U,V\in\mathscr{U}_0\Longrightarrow\exists W\in\mathscr{U}_0$，使得$W\subset U\cap V$；

(3) $U\in\mathscr{U}_0\Longrightarrow\exists V\in\mathscr{U}_0$，使得$V+V\subset U$；

(4) $U\in\mathscr{U}_0\Longrightarrow(\exists V\in\mathscr{U}_0$，使得$|\alpha|\leqslant 1\ (\alpha\in K)\Longrightarrow\alpha V\subset U)$；

(5) $\forall x\in X,\forall U\in\mathscr{U}_0\Longrightarrow\exists\alpha\in K$，使得$x\in\alpha U$.

这时，X的拓扑由取$\{x+U\mid U\in\mathscr{U}_0\}$作为点$x$的邻域基确定.

证明留作练习.

例1.4 空间$K(\Omega)$.设Ω表示一维欧几里德空间$\mathbf{R}^1$内的紧集，$K(\Omega)$表示$\mathbf{R}^1$上一切无限次可微且在Ω外等于0的复值函数全体，线性运算由函数的通常运算给出，零点的邻域依下列规则定义：给定数$\varepsilon>0$和自然数m，令

$$V(m,\varepsilon)=\{x(t)\mid \forall t\in\Omega\ |x^{(k)}(t)|<\varepsilon,k=0,1,2,\cdots,m\},$$

则定理1.7的条件满足，于是$K(\Omega)$是拓扑线性空间，其中收敛性相应于$\{x_n(t)\}$及其一切阶导函数的一致收敛性.

例1.5 空间$Z(G)$.设G是复平面上的区域，$Z(G)$表示在G内定义且解析的一切复值函数全体，线性运算由函数的通常方式给出，零点邻域由下列规则定义：给定数$\varepsilon>0$和闭集$F\subset G$，令

$$V(\varepsilon,F)=\{x(t)\mid\max_{t\in F}|x(t)|<\varepsilon\},$$

则定理1.6的条件满足，序列$\{x_n(t)\}$在所定义拓扑内的收敛性为内闭一致收敛性(即在G内的每个闭子集上一致收敛).

例1.6 空间K(或$\mathscr{D}$).设C_0^∞表示定义在实n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$上的一切在某一个(依赖于函数的)紧集外等于0的无限次可微的复值函数全体. 线性运算由函数的通常方式给出，则C_0^∞组成线性空间. 记$\Omega=\{\Omega_0,\Omega_1,\cdots\}$，这里$\Omega_0=\varnothing$，$\Omega_j=\{x\mid|x|<j\}$，$j=1,2,\cdots$；记$\{m\}=\{m_0,m_1,m_2,\cdots\}$，$m_j$是单调增加趋于$\infty$

的非负整数序列；记$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\}$，$\varepsilon_j$是单调减少趋于零的实数序列。令

$$V(\{m\},\{\varepsilon\})=\{\varphi \mid \varphi\in C_0^\infty，\text{而且当}|\alpha|\triangleq\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant m_j,$$
$$x\in\Omega_j\text{时},|D^\alpha\varphi(x)|<\varepsilon_j, j=0,1,2,\cdots\}.$$

取一切$V(\{m\},,\{\varepsilon\})$的全体作为$C_0^\infty$的邻域基，则$C_0^\infty$成为拓扑线性空间，记为$K$或$\mathscr{D}$.

4. **有界集**

定义1.4 设X是拓扑线性空间，$A\subset X$. 若对于一切零点邻域V，$\exists\lambda\in K$，使得$A\subset\lambda V$，则称A为**有界集**.

注1：显然，为了验证集A有界，只用考虑某个零点邻域基即可.

注2：此定义与度量空间内有界集的定义不同.

有界集有以下性质：

定理1.8 在拓扑线性空间X中，

(1) 有限多个有界集的和与并仍为有界集；

(2) 若A有界，则$\forall\alpha\in K$，αA有界；

(3) 有限集是有界集；

(4) 有界集的子集仍为有界集；

(5) 有界集的闭包仍为有界集；

(6) 收敛序列必有界.

证明留作练习.

定理1.9 拓扑线性空间X的子集A为有界集的充要条件是：对于一切序列$\{x_n\}\subset A$及实数序列$\{\lambda_n\}$，若$\lambda_n\longrightarrow 0$，则$\lambda_n x_n\longrightarrow 0(n\to\infty)$.

证：必要性. 设$\{x_n\}$和$\{\lambda_n\}$如定理，任取零点的均衡邻域V，存在$\lambda>0$，使$A\subset\lambda V$. 特别，$x_n\in\lambda V(n=1,2,\cdots)$. 取$n$充分大，使得$|\lambda_n|\leqslant 1/\lambda$，则$\lambda_n x_n\in\lambda_n\lambda V\subset V$，即$\lambda_n x_n\longrightarrow 0(n\to\infty)$.

充分性. 用反证法. 若A非有界，则存在零点的邻域V，使得

对于任意 $\lambda>0$，集 $A\setminus\lambda V\neq\varnothing$. 依次取 $\lambda=1, 2, \cdots$，即得 $x_n\in A\setminus nV(n=1,2,\cdots)$，于是 $x_n\in A$. 另一方面，$\frac{1}{n}x_n\,\overline{\in}\,V$，与 $\lambda_n x_n\longrightarrow 0$ 矛盾. □

5.**完备性**

设 X 是拓扑空间，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 内的一个网，而且 $x\in X$. 若对于 x 的一切邻域 $V_x\in\mathscr{U}_x$，存在 $\alpha_V\in A$，使得 $\alpha\geqslant\alpha_V$ 时 $x_\alpha\in V_x$，则称 $\{x_\alpha\}$ 收敛于 x，记为 $x_\alpha\longrightarrow x(A)$ 或 $\lim\limits_\alpha x_\alpha=x$，称 x 为 x_α 的极限. 显然有

$$x_\alpha\longrightarrow x(A)\Longleftrightarrow x_\alpha-x\longrightarrow 0(A).$$

设 X 是拓扑线性空间，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 内的网. 若 $\forall\, V\in\mathscr{U}_0$，$\exists\,\alpha_0\in A$，使得 $\alpha_1,\alpha_2\in A$，而且 $\alpha_1\geqslant\alpha_0$，$\alpha_2\geqslant\alpha_0$ 时 $x_{\alpha_1}-x_{\alpha_2}\in V$，则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为**柯西网**.

设 X 是拓扑线性空间. 若 X 内的任意柯西网都收敛，则称 X 为**完备空间**. 若只研究有界网，则称 X 为**拟完备空间**. 若只考虑序列，则称 X 为**序列完备空间**.

定理1.10 具有可数零点邻域基的、序列完备的拓扑线性空间 X 必为完备的.（即三种完备性等价）

证： 设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 内的柯西网，用 $\{V_n\}(n=1,2,\cdots)$ 表示可数的零点邻域基. 对于每一个 $n\in\mathrm{N}$，存在有序对 $(\alpha_n',\alpha_n'')\in A^2$，使得 $\alpha'\geqslant\alpha_n'$ 而且 $\alpha''\geqslant\alpha_n''$ 时有 $x_{\alpha'}-x_{\alpha''}\in V_n$. 令 $\alpha_n\in A$ 而且满足条件 $\alpha_n\geqslant\alpha_n'$ 及 $\alpha_n\geqslant\alpha_n''$，可以认为 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots$. 考虑序列 $\{x_{\alpha_n}\}$，它显然也是柯西序列，由条件知存在 $x\in X$，使得 $x_{\alpha_n}\longrightarrow x$. 我们来证明 $x_\alpha\longrightarrow x(A)$. 任取邻域 $V_m\in\mathscr{U}_0$，则存在邻域 V_k 使得 $V_k+V_k\subset V_m$，于是必有指标 $n\geqslant k$，使得 $x_{\alpha_n}-x\in V_k$.

另一方面，由于 $x_{\alpha'}-x_{\alpha''}\in V_n$ $(\alpha'\geqslant\alpha_n',\alpha''\geqslant\alpha_n'')$，于是对于 $\alpha\geqslant\alpha_n$ 时有 $x_\alpha-x_{\alpha_n}\in V_k$，所以

$$x_\alpha-x=(x_\alpha-x_{\alpha_n})+(x_{\alpha_n}-x)\in V_k+V_k\subset V_m.\ \square$$

可以仿度量空间的完备化，证明任意T_2型拓扑线性空间都有完备化空间，这里从略。

§2 局部凸拓扑线性空间

在拓扑线性空间理论中有许多方向可以推广，然而对于许多理论来说．局部凸拓扑线性空间有着比一般拓扑线性空间丰富得多的成果．在局部凸拓扑线性空间中存在着足够多的连续线性泛函，而广义函数论中遇到的空间几乎都是局部凸的．

我们先介绍半范数与闵可夫斯基(Минковский)泛函概念．

1．半范数与闵可夫斯基泛函

定义 2.1 设X是数域K上的线性空间，p是定义在X上的实函数，满足下列条件：

(1) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$， $(x,y\in X)$

(2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$， $(x\in X,\alpha\in K)$

则称p为**半范数**．

显然，范数是半范数的常见的例子．

设P是X上的半范数组．若对于每一个$x\neq 0$，必有$p\in P$，使得$p(x)\neq 0$，则称P是分离的．

定义 2.2 设吸收集$A\subset X$，令

$$\mu_A(x)=\inf\{\lambda \mid \lambda>0,\ x\in\lambda A,\ x\in X\},$$

则由于A是吸收的，于是A包含零点，而且$0\leqslant\mu_A(x)<\infty$，称它为$A$的**闵可夫斯基泛函**．

定理 2.1 设p是线性空间X上的半范数，则

(1) $p(0)=0$；

(2) $|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y)$；

(3) $p(x)\geqslant 0$；

(4) 集$\{x \mid p(x)=0\}$是X的子空间；

(5) 集 $B\triangleq\{x \mid p(x)<1\}$是绝对凸、吸收的，而且 $p=\mu_B$。

证：(1) 由 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，令 $\alpha=0$ 即可。

(2) 由于 $p(x)=p((x-y)+y)\leqslant p(x-y)+p(y)$

和 $$p(y)=p((y-x)+x)\leqslant p(y-x)+p(x),$$

于是 $$p(x)-p(y)\leqslant p(x-y).$$

又由定义 2.1 之(2)，令 $\alpha=-1$ 知 $p(x-y)=p(y-x)$即得.

(3) 由(2)立得.

(4) 若 $p(x)=p(y)=0,\alpha,\beta\in K$，由(3)得

$$0\leqslant p(\alpha x+\beta y)\leqslant|\alpha|p(x)+|\beta|p(y)=0,$$

于是

$$p(\alpha x+\beta y)=0.$$

(5) 设 $x,y\in B,\alpha,\beta\in K$，而且$|\alpha|+|\beta|\leqslant1$，则

$$p(\alpha x+\beta y)\leqslant|\alpha|p(x)+|\beta|p(y)<|\alpha|+|\beta|\leqslant1,$$

所以B绝对凸. 又$\forall x\in X$，令 $\delta>0$ 而且满足 $p(x)<1/\delta$，则 $p(\lambda x)<|\lambda|/\delta$，于是$|\lambda|\leqslant\delta$ 时 $p(\lambda x)<|\lambda|/\delta\leqslant1$，即$|\lambda|\leqslant\delta$ 时，$\lambda x\in B$，故 B 是吸收集. 下边证 $p=\mu_B$.

首先，因为 B 是吸收的，所以 $0\leqslant\mu_B(x)<\infty$. 又任取 $x\in X$ 和任意的 $s>p(x)$都有

$$p(x/s)=p(x)/s<1.$$

于是 $x/s\in B$. 从而 $x\in sB$，故$\mu_B(x)\leqslant s$. 令 $s=p(x)+\varepsilon(\varepsilon>0)$，则 $\mu_B(x)<p(x)+\varepsilon$. 令$\varepsilon\longrightarrow0^+$，即得 $\mu_B(x)\leqslant p(x)$.

另一方面，若 $0<t<p(x)$，则 $p(x/t)\geqslant1$，于是 $x/t\bar{\in}B$，从而 $\mu_B(x)\geqslant t$. 取 $t=p(x)-\varepsilon(\varepsilon>0)$，则 $\mu_B(x)>p(x)-\varepsilon$. 令$\varepsilon\longrightarrow0^+$，得 $\mu_B(x)\geqslant p(x)$，因此等式成立. □

系 若 p 是半范数，而且 $x\neq0$ 时 $p(x)\neq0$，则 p 是范数.

证：由定理 2.1 的(1)和(3) 以及半范数定义知 $p(x)=0\Longrightarrow x=0$. (否则 $x\neq0$ 时有 $p(x)\neq0$，矛盾). □

定理 2.2 设A是线性空间 X 内的凸吸收集，则

(1) $\mu_A(x+y)\leqslant\mu_A(x)+\mu_A(y)$;

(2) $\mu_A(tx)=t\mu_A(x)\quad(t>0)$;

(3) 若A是均衡集,则μ_A是半范数;

(4) 若
$$B\triangleq\{x\mid\mu_A(x)<1\},$$
$$C\triangleq\{x\mid\mu_A(x)\leqslant1\},$$
则$B\subset A\subset C$,而且$\mu_B=\mu_A=\mu_C$.

注:满足(1)和(2)的泛函,即满足条件
$$\mu_A(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha\mu_A(x)+(1-\alpha)\mu_A(y)$$
的泛函也称为**凸泛函**.

证:(1) 由下确界定义,$\forall x,y\in X$和$\forall\varepsilon>0$,$\exists\lambda,\mu\in K$,使得$x\in\lambda A,y\in\mu A$,而且
$$\mu_A(x)\leqslant\lambda<\mu_A(x)+\varepsilon,\quad\mu_A(y)\leqslant\mu<\mu_A(y)+\varepsilon.$$
于是$x/\lambda\in A$,而且$y/\mu\in A$. 由A的凸性知
$$\frac{x+y}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{x}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{y}{\mu}\in A,$$
所以
$$\mu_A(x+y)\leqslant\lambda+\mu\leqslant\mu_A(x)+\mu_A(y)+2\varepsilon.$$
令$\varepsilon\longrightarrow0^+$即可.

(2)
$$\mu_A(tx)=\inf\{s>0\mid tx\in sA\}$$
$$=t\inf\left\{\frac{s}{t}\;\middle|\;s>0,x\in\frac{s}{t}A\right\}=t\mu_A(x).\ (t>0).$$

(3) 若A是均衡集,则由于
$$\lambda x\in\mu A$$
$$\Longleftrightarrow x\in\frac{\mu}{|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{\lambda}A\right)=\frac{\mu}{|\lambda|}A\quad(\lambda\neq0)$$
$$\Longleftrightarrow|\lambda|x\in\mu A\quad(\lambda\text{ 可取}0)$$
(因为$|\alpha|=1$时$\alpha A\subset A$且$\frac{1}{\alpha}A\subset A$,所以$\alpha A=A$),因此
$$\mu_A(\lambda x)=\inf\{\mu>0\mid\lambda x\in\mu A\}$$

$$= |\lambda| \inf\left\{ \frac{\mu}{|\lambda|} \;\middle|\; \mu>0, x\in \frac{\mu}{|\lambda|}A \right\}$$

$$= |\lambda| \mu_A(x).$$

(4) 令 $H_A(x)=\{t>0 \mid x\in tA\}$，则 $x\in B$ 时，$\mu_A(x)<1$，于是 $1\in H_A(x)$，故 $x\in A$，从而 $\mu_A(x)\leqslant 1$. 于是，$B\subset A\subset C$，由此推出 $H_B(x)\subset H_A(x)\subset H_C(x)\ (\forall x\in X)$，从而

$$\mu_C(x)\leqslant \mu_A(x)\leqslant \mu_B(x).$$

为了证明等式成立，假定 $\mu_C(x)<s<t$，则 $x/s\in C \Longrightarrow \mu_A(x/s)\leqslant 1$，于是 $\mu_A(x)\leqslant s$，

$$\mu_A(x/t)\leqslant s/t<1,$$

所以 $x/t\in B$，从而 $\mu_B(x/t)\leqslant 1$，即 $\mu_B(x)\leqslant t$. 令 $t=\mu_C(x)+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$，则当 $\varepsilon\longrightarrow 0^+$ 时

$$\mu_B(x)\leqslant \mu_A(x)\leqslant \mu_C(x),$$

所以等式成立. □

2. 局部凸拓扑线性空间概念

定义 2.3 设 X 是拓扑线性空间. 若在 X 中存在凸的零点的邻域基，则称 X 为局部凸拓扑线性空间，简称**局部凸空间**，记为 LCS(Locally convex space).

由定义 2.3，定理 1.2 及定理 1.5 的系知：

定理 2.3 拓扑线性空间 X 为局部凸的充要条件是：X 有绝对凸的、吸收的零的邻域基.

例 2.1 空间 $L^p(0,1)\ (0<p<1)$ 不是局部凸的.

证： 只用证明此空间内有一个邻域不包含凸邻域即可. 为此，取单位球

$$B_1(0)=\{x \mid \|x\|<1\},$$

则 $B_1(0)$ 不能包含零的任何凸邻域. 事实上，设 $V_0\subset B_1(0)$ 为零的一个凸邻域，则由定理 1.5 知存在 $\delta_0>0$，使得 $B_{\delta_0}(0)\subset V_0$. 今将区间 $[0,1]$ 分为 n 等份，而且定义函数

$$x_k(t)=\begin{cases} n^{1/p}, & t\in\left[\dfrac{k-1}{n},\ \dfrac{k}{n}\right) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |\delta_0{}^{1/p}x_k(t)|^p\mathrm{d}t\\ &=\delta_0\int_0^1 x_k^p(t)\mathrm{d}t\\ &=\delta_0\int_{(k-1)/n}^{k/n} n\mathrm{d}t=\delta_0,\end{aligned}$$

因此 $\delta_0^{1/p}\ x_k\in B_{\delta_0}(0)\subset V_0(1\leqslant k\leqslant n)$，从而，由 V_0 的凸性得

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(\delta_0{}^{1/p}\ x_k)\in V_0\subset B_1(0).$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned}\|x_n\|_p&=\int_0^1|x_n(t)|^p\mathrm{d}t=\frac{\delta_0}{n^p}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\right|^p\ \mathrm{d}t\\ &=\frac{\delta_0}{n^p}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}[x_k(t)]^p\mathrm{d}t\right\}\\ &=\delta_0 n^{1-p},\end{aligned}$$

因此，当 n 足够大时，有 $\|x_n\|_p>1$，从而 $x_n\notin B_1(0)$，矛盾. □

例 2.2 空间 $l^p(0<p<1)$ 也不是局部凸空间.

证明与例 2.1 相仿. 只须设

$$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ (\varepsilon^{1/p}\delta^k)=\left(\frac{\varepsilon^{1/p}}{n},\ \frac{\varepsilon^{1/p}}{n},\cdots,\frac{\varepsilon^{1/p}}{n},0,\cdots,0\right),$$

其中 $\delta^k=(\delta_{nk})$，δ_{nk} 为克朗涅克(Kronecker)符号.

注：值得注意的是空间 $L^p(0<p<1)$ 上不存在非零连续线性泛函，而空间 $l^p(0<p<1)$ 的共轭空间是空间 m.

定理 2.4 设在线性空 X 间中给出吸收的绝对凸集组 $\mathscr{U}_0$. 记

$\mathscr{U}$ 为下列形式的集组：$\varepsilon\bigcap_{i=1}^{n}V_i(\varepsilon>0,\ V_i\in\mathscr{U}_0, n\in\mathrm{N})$，则集组 $\mathscr{U}$ 满足定理 1.4 的所有条件，而且使 X 成为局部凸空间，以 $\mathscr{U}$ 为其零点邻域基.

证：集组 $\mathscr{U}$ 满足定理 1.4 的条件(1)～(3)是显然的. 对于任一凸集 E，有 $\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}E=E$，于是 (4) 也成立. 因此 X 是拓扑线性空间. 而集 $\varepsilon\bigcap_{i=1}^{n}V_i$ 是绝对凸的，所以 X 是局部凸空间. □

系 若集组 $\mathscr{U}_0$ 满足：对任意的 $x\neq0$，存在 $V\in\mathscr{U}_0$ 和 $\varepsilon>0$，使得 $x\in\lambda V$，则由理定 1.4 的系知，X 是 T_2 型局部凸空间.

定理 2.5 拓扑线性空间 X 是局部凸空间的充要条件是：X 的拓扑可由一组连续半范数 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 确定.

证：充分性. 设半范数组 $\{p_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$ 决定 X 的拓扑 τ_1，令邻域组

$$U_{\alpha,\varepsilon}=\{x\mid p_\alpha(x)<\varepsilon\},$$

则由定理 2.1 知 $U_{\alpha,\varepsilon}$ 是绝对凸的，而且 $p_\alpha=\mu_{U_{\alpha,\varepsilon}}$，所以 X 为局部凸空间.

必要性. 设 X 是局部凸空间，则由定理 1.5 的系 2 可知 X 有零元素的绝对凸的吸收邻域基 $\mathscr{U}_0$. 任取 $U\in\mathscr{U}_0$，取它的闵可夫斯基泛函

$$\mu_U(x)=\inf\{\lambda\mid\lambda>0,x\in\lambda U\},$$

则由定理 2.1 和定理 2.2 知 $\mu_U(x)$ 为连续的半范数，而且 X 内点 x 的邻域组

$$V_{U,\varepsilon}\triangleq\{x|\mu_U(x)<\varepsilon\}$$

确定的 X 的拓扑 τ_1 与原来的拓扑 τ_2 等价. 事实上，由定理 2.1 可知每一个半范数都在 τ_2 意义下连续，于是每一个集 $U_{\alpha,\varepsilon}$ 在 τ_1 内.

因此 $\tau_1 \subset \tau_2$. 反之,若 $U \in \mathscr{U}_0$,而且 $p = \mu_U$,则

$$U = \{x \mid \mu_U(x) < 1\} = V_{U,1}.$$

于是 $U \in \tau_1$,从而 $\tau_2 \subset \tau_1$. □

注1: 由定理 2.4 的系知 T_2 拓扑线性空间为局部凸空间的充要条件是: X的拓扑由一组分离的连续半范数确定.

注2: 与局部凸空间有关的许多概念用半范数来表示时具有简单和直观的意义. 设$\{p_\xi\}_{\xi \in I}$ 是确定局部凸空间拓扑的一组半范数,从定理 2.5 可推出下列结论:

系1 设$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$是局部凸空间 X 中的网,$x \in X$,则

$$x_\alpha \longrightarrow x(A) \Longleftrightarrow \forall \xi \in I, \text{有 } p_\xi(x_\alpha - x) \longrightarrow 0(A).$$

系2 集 $E \subset X$ 有界$\Longleftrightarrow \forall \xi \in I$,数集$\{p_\xi(x) \mid x \in E\}$有界.

3. 可度量化与可赋范化

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间. 若存在 X 上的距离 ρ 与拓扑 $\mathscr{T}$ 等价,则称它为**可度量化空间**. 显然,X 可度量化的必要条件是 X是有可列邻域基的拓扑线性空间. 对于 T_0 空间它也是充分的,即下列定理成立:

定理 2.6 若 X 是具有可列邻域基的 T_0 型拓扑线性空间,则存在 X 上的距离 ρ,使得

(1) ρ 同 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 等价;

(2) 中心在零点的开球是均衡的;

(3) ρ 是平移不变的,即

$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y), \quad x, y, z \in X.$$

又,再加上 X 是局部凸空间时,则可选择 ρ 满足条件 (1)~(3),而且满足条件

(4) 一切开球都是凸的.

证: 由定理 1.5 的系 2 和定义 2.1 知 X 内有零点的均衡邻域基$\{V_n\}$,使得

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n. \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.1}$$

当X是局部凸空间时，可选取这个邻域基，使得每一个V_n也是凸的.

设D是二进有理数r的集，即

$$r=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(r)2^{-n}. \tag{2.2}$$

这里数字$c_n(r)$是0或1，而Σ中仅有有限多项是1．我们定义

$$A(r)=\begin{cases}c_1(r)V_1+c_2(r)V_2+\cdots, & r\in D \text{ 且 } 0\leqslant r<1\\ X, & r\geqslant 1\end{cases}$$

令
$$f(x)=\inf\{r \mid x\in A(r)\} \quad (x\in X),$$
$$\rho(x,y)=f(x-y) \quad (x,y\in X),$$

则ρ即为所求度量(距离). 为了证明定理，先证明下列包含关系：

$$A(r)+A(s)\subset A(r+s) \quad (r,s\in D). \tag{2.3}$$

用归纳法证明. 设命题D_N：若$r+s<1$，而且$c_n(r)=c_n(s)=0(\forall n>N)$，则

$$A(r)+A(s)\subset A(r+s).$$

(当$r+s\geqslant 1, A(r+s)=X$，包含关系显然成立，因此只用考虑$r+s<1$的情形).

由直接计算知D_1成立. 事实上，因为$c_2(r)=c_2(s)=c_3(r)=c_3(s)=\cdots=0$，于是

$$r=\frac{1}{2}c_1(r), \qquad s=\frac{1}{2}c_1(s),$$

而且$A(r)=c_1(r)V_1, A(s)=c_1(s)V_1$，于是

$$A(r)+A(s)=c_1(r)V_1+c_1(s)V_1.$$

从而当$c_1(r)=c_1(s)=0$时，

$$A(r)+A(s)=\{0\}\subset A(r+s).$$

若$c_1(r)=1, c_1(s)=0$；或$c_1(r)=0, c_1(s)=1$，则

$$A_1(r)+A_1(s)=V_1=A\left(\frac{1}{2}\right)=A(r+s).$$

若 $c_1(r)=c_1(s)=1$，则 $r+s=1$，这不可能，于是 D_1 成立.

设 D_{N-1} 成立($N>1$)，取 $r,s\in D$，使 $r+s<1$，而且 $n>N$ 时 $c_n(r)=c_n(s)=0$，由下式定义 r 与 s：

$$r=r'+c_N(r)2^{-N},\qquad s=s'+c_N(s)2^{-N},$$

则有

$$A(r)=A(r')+c_N(r)V_N,$$
$$A(s)=A(s')+c_N(s)V_N.$$

由 D_{N-1} 知 $A(r')+A(s')\subset A(r'+s')$，于是

$$\begin{aligned}A(r)+A(s)&\subset A(r'+s')+c_N(r)V_N+c_N(s)V_N\\&\subset A(r'+s')+V_N+V_N\\&\subset A(r'+s')+V_{N-1}\\&=A(r'+s')+A(1/2^{N-1})\\&\subset A(r'+s'+1/2^{N-1})=A(r+s).\end{aligned}$$

于是对于一切自然数 N，D_N 成立.

我们现在证明定理本身.

(1) $\rho(x,y)$满足距离公理. 只证三角形不等式. 因为对于一切 t，总有 $0\in A(t)$，故知当 $r<t$ 时

$$A(r)\subset A(r)+A(t-r)\subset A(t).$$

于是集族$\{A(r)\}$由集的包含关系"$\subset$"组成全序集. 若能证明

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)\quad(\forall x,y\in X),\tag{2.4}$$

$\rho(x,y)$即适合三角形不等式. 为此不妨假定(2.4)式右边小于 1. 给定 $\varepsilon>0$，则存在 $r,s\in D$，使得 $f(x)<r$，$f(y)<s$，而且$r+s<f(x)+f(y)+\varepsilon$，于是 $x\in A(r)$，$y\in A(s)$，而且由(2.3)式得 $x+y\in A(r+s)$，从而

$$f(x+y)\leqslant r+s<f(x)+f(y)+\varepsilon.$$

因 ε 任意，故(2.4)式成立.

(2) 因为中心在零点的开球是开集，而

$$B_\delta(0) \triangleq \{x \mid f(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} A(r),$$

若 $\delta < 2^{-n}$,则 $B_\delta(0) \subset V_n$, 所以$\{B_\delta(0)\}$是X内 0 点的邻域基. 又因为每一个 $A(r)$都是均衡的,所以每一个 $B_\delta(0)$亦然.

(3) $$\rho(x,y) = f(x-y) = f((x+z)-(y+z)) = \rho(x+z, y+z) \quad (x,y,z \in X).$$

(4) 若每一个 V_n 是凸的,则每一个 $A(r)$, 从而每一个 $B_\delta(0)$ 也是凸的. 事实上,对于一切 $x, y \in B_\delta(0)$,必有 $r_1 < \delta, r_2 < \delta$,使得 $x \in A(r_1), y \in A(r_2)$. 令 $r = \max(r_1, r_2)$,则 $x, y \in A(r)$,于是当 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时,

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A(r).$$

故 $$\alpha x + (1-\alpha) y \in B_\delta(0). \quad \square$$

同可度量化类似,若拓扑线性空间X内有范数 p 与X的拓扑$\mathscr{T}$等价,则称X是**可赋范空间**,而由范数生成的拓扑称为空间X的范数拓扑.

定理 2.7(柯尔莫哥洛夫(Колмогоров)定理) 拓扑线性空间X是可赋范的充要条件为: X满足 T_2 公理,而且存在 0 点的有界凸邻域.

证: 必要性:

若X可赋范,令$\|\cdot\|$是与X的拓扑等价的范数,则开单位球 $B_1(0) = \{x \mid \|x\| < 1\}$是有界凸邻域.

充分性.

设X内存在有界凸邻域 V_0,不妨认为 V_0 是绝对凸的和吸收的. 对于 $x \in X$,令 $\|x\| = \mu_{V_0}(x)$,这里 $\mu_{V_0}(x)$是 V_0 的闵可夫斯基泛函,则由定理 2.2 知 $\mu_{V_0}(x)$ 是半范数,从而由定理 2.1 知

$$V_0 = \{x \mid \mu_{V_0}(x) < 1\}.$$

只用证明从$\|x\| = 0$可推出 $x = 0$. 事实上,若 $x \neq 0$,则因为X是 T_2

型分离空间，因此存在$U\in\mathscr{U}_0$使得$x\bar{\in}U$. 再由V_0有界，存在$\lambda>0$，使得$V_0\subset\lambda U$，于是由$\lambda x\bar{\in}\lambda U$知$\lambda x\bar{\in}V_0$. 由定理2.2知

$$\|x\|=\mu_{V_0}(x)=\frac{1}{\lambda}\mu_{V_0}(\lambda x)\geqslant\frac{1}{\lambda}.$$

从而$\|x\|\neq0$. 因此，X为赋范空间.

我们来证明X中原有拓扑$\mathscr{T}$与由范数产生的拓扑等价. 因为V_0有界，故对于一切$U\in\mathscr{U}_0$，存在$\lambda>0$，对一切$\mu>\lambda$，有$V_0\subset\mu U$. 于是集

$$\nu U=\{x\mid\ \|x\|<\nu\}\quad(\nu>0)$$

对于X的拓扑$\mathscr{T}$组成零点邻域基，故范数拓扑与原拓扑等价. □

4. **赋可列半范化**

对于赋半范数组的拓扑线性空间而言，当它的拓扑与一个半范数列所确定的拓扑等价时，称为**赋可列半范空间**. 下面我们就来讨论拓扑线性空间赋可列半范化的特征条件.

定理2.8 拓扑线性空间X赋可列半范数的充要条件为：X是满足第一可列公理的局部凸空间.

证： 必要性.

设空间X的拓扑由一列半范数$\Phi=\{p_n\}$给定，则由拓扑定义和定理2.4知其邻域基可由

$$U_n(1/m)\triangleq\{x\mid p_n(x)<1/m\}\quad(n,m\in\mathrm{N})$$

的有限交组成，当然满足第一可列公理. 另外，由于$U_n(1/m)$为零的凸邻域，而任意有限个凸集之交是凸的，所以X是局部凸空间.

充分性.

设X为满足第一可列公理的局部凸空间，我们的目的是找出一列半范数，使它确定的拓扑与原来的拓扑等价.

设$\{U_n\}$为空间X内在零点的可列凸邻域基，则存在零点的一列绝对凸的邻域基$\{W_n\}$. 令$p_n(x)$为对应于W_n的闵可夫斯基泛函，则由定理2.1知$p_n(x)$为X上的连续半范数，而且易证

$$W_n=\{x \mid p_n(x)<1, x\in X\}.$$

下边证明由上述半范数列 $\Phi\triangleq\{p_n\}_{n\in N}$ 所确定的拓扑

$$W=(X,\Phi)=\{U_{n\varepsilon}\triangleq\{x \mid p_n(x)<\varepsilon\}\}_{n\in N}$$

与空间 X 的原来拓扑 $\mathscr{T}$ 等价. 事实上，因为对于一切自然数 n，$p_n(x)$ 都连续，故知 $\forall\varepsilon>0, U_{n\varepsilon}$ 是零点的开邻域，即 Φ 所确定的拓扑 $W(X,\Phi)$ 是弱于 $\mathscr{T}$ 的. 另一方面，$\forall U\in\mathscr{U}_0$（在原拓扑结构下零点的邻域基），存在 $n\in N$，使得 $W_n\subset U, U_{n1}=W_n\subset U$，即空间原来的拓扑 $\mathscr{T}$ 弱于 $W(X,\Phi)$. □

注：一个赋可列半范数的空间也称为 B_0^* **空间**，完备的 B_0^* 空间称为 B_0 **空间**，而相应的半准范数为：

$$\|x\|^*\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)},\quad (x\in X)$$

称为 B_0^* 范数（或相应的称为 B_0 范数）.

系 设 X 是满足第一可列公理的局部凸空间，则在 X 上的半范数列可代以一列单调增加的半范数.

证：由定理 2.8，X 可赋以一列半范数 $\Phi_0\triangleq\{p_n^0\}_{n\in N}$. 令

$$p_n(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}p_k^0(x),\quad (x\in X, n\in N)$$

则 $p_n(x)$ 显然是单调增加的，只须证明 Φ_0 确定的拓扑 $\mathscr{T}_0$ 与 $\Phi\triangleq\{p_n\}_{n\in N}$ 确定的拓扑 $\mathscr{T}$ 等价. 事实上，任取序列 $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$，若它依拓扑 $\mathscr{T}$ 收敛于 x，由定理 2.5 的系 1 知，对于一切自然数 k，$p_k(x_n-x)\to 0(n\to\infty)$. 再由 $p_n(x)$ 的定义，对一切自然数 k 都有 $p_k^0(x_n-x)\to 0(n\to\infty)$. 反之显然成立. 所以 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}_0$ 等价. □

定理 2.9 拓扑线性空间 X 赋可列半范数的充要条件是：X 是可度量化的.

证：充分性.

设 X 是可度量化的，则存在由可列多个凸集组成的零点邻域基 $\{U_n\}$. 不失一般性，可以假定 $U_{n+1}\subset U_n(n=1,2,\cdots)$，则由定理 2.3 知可假定每一个 U_n 都是绝对凸集和吸收集. 设 p_n 是 U_n 的

闵可夫斯基泛函，则由定理 2.2 知 p_n 是 U_n 上的半范数. 仿定理 2.8 充分性的证明可知由$\{p_n\}$确定的拓扑与原来拓扑等价.

必要性.

设 X 的拓扑由可列个半范数 $P=\{p_n\}$确定. 由定理 2.8 的系，不妨假定 $p_n(x)\leqslant p_{n+1}(x)(n=1,2,\cdots,x\in X)$. 显然，集

$$U_{n,k}\triangleq\{x\,|\,p_n(x)<1/k\}$$

组成零点的绝对凸吸收邻域基. 我们定义

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.\quad(x,y\in X)$$

易知 ρ 定义 X 上的平移不变距离，为了证明这个度量拓扑与 X 的原来拓扑等价，只须证明在零点的情形.

设 $n\geqslant1$，而且设 $p_{n+1}(x)<1/2^{n+1}$，则有

$$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots\leqslant p_{n+1}(x)<1/2^{n+1}.$$

又因 $p_k(x)/(1+p_k(x))\leqslant p_k(x)$，于是

$$\begin{aligned}\rho(x,0)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)}+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)}\\&<\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\\&<\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

因此 $U_{n+1,n+1}\subset\{x\,|\,\rho(x,0)<1/2^n\}$，$n=1,2,\cdots$.

另一方面，设 $\rho(x,0)<1/2^{n+1}\quad(n\geqslant1)$. 记 $n=m+k$，$m\geqslant1$，则 $\rho(x,0)<1/2^{m+k+1}$. 于是 $p_m(x)/\{2^m[1+p_m(x)]\}<1/2^{m+k+1}$，从而 $p_m(x)/[1+p_m(x)]<1/2^{k+1}$. 解 $p_m(x)$ 得

$$p_m(x)<1/[2^{k+1}-1]<1/2^k.$$

于是 $\{x \mid \rho(x,0)<1/2^{m+k+1}\}\subset U_{m,2^k}$,

其中 $m,k=1,2,\cdots$,即 ρ 确定的度量拓扑和半范数确定的拓扑等价. □

例 2.3 在空间 $K(\Omega)$ 中可赋以半范数列 $\{p_n\}$:

$$p_n(x)\triangleq \max_{\substack{t\in\Omega\\0\leqslant k\leqslant n}}|x^{(k)}(t)|,(x\in k(\Omega),n\in\mathbb{N})$$

其中 $x_0(t)=x(t)$,显然 $x=0\Longleftrightarrow p_n(x)=0(\forall n\in\mathbb{N})$和

$$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots\leqslant p_n(x)\leqslant\cdots(\forall x\in K(\Omega)).$$

从而 $K(\Omega)$ 按范数列 $\{p_n\}$ 组成一个满足 T_0 分离公理和第一可列公理的拓扑线性空间.

§3 赋可列范空间

在广义函数论中,应用较赋可列半范数空间还要狭一些的一类重要的局部凸空间是赋可列范空间. 为此,我们先介绍和谐范数的概念.

1. 和谐范数

设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 内的两个范数. 若存在常数 $M>0$,使得

$$\|x\|_1\leqslant M\|x\|_2,(\forall x\in X) \tag{3.1}$$

则称范数 $\|\cdot\|_2$ 强于(或不弱于)范数 $\|\cdot\|_1$,或范数 $\|\cdot\|_1$ 弱于(或不强于)范数 $\|\cdot\|_2$. 若其中一个范数既强于又弱于另一个范数,则称它们是**等价范数**.

每一个赋范线性空间都能由完备化延拓为巴拿赫空间. 若 X 由 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 都成为巴拿赫空间,而且 (3.1) 式成立,则范数 $\|\cdot\|_1$ 与范数 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

定义 3.1 设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数,$\{x_n\}$ 是 X 中依两个范数的柯西序列. 若 $\{x_n\}$ 依其中一个范数收敛于 0

时，依另一个范数也收敛于0，则称它们是**和谐范数**.

例3.1 设$C^1[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上一切连续可微函数的全体，线性运算依函数的通常方式给定，定义三个范数如下：

$$\|x\|_1=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,$$

$$\|x\|_2=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)|+|x'(t)|\},$$

$$\|x\|_3=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)|\}+|x'(a)|,$$

则范数$\|x\|_1$与$\|x\|_2$是和谐的，而范数$\|x\|_1$与范数$\|x\|_3$不是和谐的.

显然，等价的范数是和谐的.

设范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是和谐的，而且(3.1)式成立. 把X关于范数$\|\cdot\|_i(i=1,2)$完备化后记为X_i，则从X到本身的恒等映射$x\mapsto x$(这里赋予像空间以$\|\cdot\|_1$而赋于原空间以范数$\|\cdot\|_2$)能作为从X_2到X_1内的双射的延拓，从而X_2可以认为是X_1的线性子空间，即$X\subset X_2\subset X_1$.

若范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是和谐的，则

$$\|\cdot\|_3\triangleq\max(\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2)$$

也同它们和谐. 事实上，不难验证$\|\cdot\|_3$也是范数. 若序列$\{x_n\}$依$\|\cdot\|_3$是柯西的，则它依范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$也是柯西的；若序列$\{x_n\}$依范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$之一收敛于0，则由于它们是和谐的，于是依另一范数也收敛于0，从而依$\|\cdot\|_3$也收敛于0. 同时，由于X依$\|\cdot\|_3$的完备化空间X_3可以一对一地映到空间X_1和X_2内，所以结果成立.

定义3.2 设X是线性空间，$\{\|x\|_p\}$是在X上确定的互相和谐的范数列，用集

$$U_{p,\varepsilon}\triangleq\{x\mid\|x\|_i<\varepsilon,i=1,2,\cdots,p\}$$

给出零点邻域组. 易知，每一个邻域都是开的，而且它的任意并与有限交都是开集，从而它确定X上的拓扑. 这时称X为**赋可列范空间**.

注 1：由定理 2.5 的注 1 知赋可列范空间都是局部凸空间.

注 2：在指出的零点邻域组 $U_{p,\varepsilon}$ 内只取 $\varepsilon=1, 1/2, \cdots$ 就够了，即这个组等价于可列组 $U_{p,1/m}(m, p=1, 2, \cdots)$. 因此它是满足第一可列公理的拓扑空间，从而在赋可列范空间内的极限过程能借助于收敛序列给出.

显然，当且仅当对于任意自然数 p 都有 $\|x_n\|_p\to 0$ 时，$x_n\to 0(n\to\infty)$. 又当且仅当对任意自然数 p，m 与 n 互相独立地趋于无限大时，$\|x_n-x_m\|_p\to 0$，则 $\{x_n\}$ 是 X 内的柯西序列. 不失一般性，在赋可列范空间内，能取单调增加的范数列，即

$$\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_p\leqslant\cdots. \tag{3.2}$$

否则仿定理 2.8 的系，能用下列不同范数：

$$\|x\|_p^*\triangleq\max\{\|x\|_1, \|x\|_2, \cdots\cdots, \|x\|_p\}$$

产生等价拓扑，而且新范数序列的每一对也是和谐的. 今后，我们总假定(3.2)式成立.

设 X_n 是空间 X 依范数 $\|\cdot\|_n$ 的完备化空间，则有 $X_1\supset X_2\supset\cdots\supset X_p\supset\cdots\supset X$.

定理 3.1 X 是完备空间的充要条件是

$$X=\bigcap_{p=1}^{\infty}X_p. \tag{3.3}$$

证：充分性.

设 $\{x_n\}$ 是 X 内的柯西序列，则 $\{x_n\}$ 在每一个 X_p 内也是柯西序列，因此存在 $x_0^{(p)}\in X_p$，使得 $x_n\to x_0^{(p)}(n\to\infty)$ 在 X_p 内成立. 由于在 X_p 与 X_{p+1} 内同一个柯西序列的极限看作相同，对一切 p 都有 $x_0^{(p)}=x^*$，因此 $x^*\in\bigcap_{p=1}^{\infty}X_p=X$. 因为对一切 p 都有

$$\|x_n-x^*\|_p\to 0(n\to\infty),$$

所以在 X 内有 $x_n\to x^*$，从而 X 是完备的.

必要性.

设 $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} X_p$，则对任意自然数 p，存在 $x_p \in X$，使得 $\|x_p - x\|_p < 1/p$，于是对任意自然数 $k \leqslant p$，有

$$\|x - x_p\|_k \leqslant \|x - x_p\|_p < 1/p.$$

因此，在 X_k 内有 $x_p \to x$，于是 $\{x_p\}$ 是每一个 X_k 内的，从而是 X 内的柯西序列. 在 X 内令

$$\bar{x} = \lim_{p \to \infty} x_p,$$

则对于任意自然数 k，有 $\|x_p - \bar{x}\|_k \to 0$，因此 $x = \bar{x} \in X$. 相反包含关系显然成立. □

例3.2 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 维实欧氏空间 R^n 内的变点，N 是 R^n 内的紧集，用 (D_N) 表示一切在 N 外为 0 且在 R^n 上定义的无限次可微复值函数，用 (D_N^m) 表示一切在 N 外为 0 且在 R^n 上定义的 m 次连续可微函数，$m = 0$ 时表示连续函数. 若定义范数为

$$\|f\|_p = \max_{|\alpha| \leqslant p} \max_{x \in N} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|, \tag{3.4}$$

这里 p 是自然数，$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$，则 (D_N^p) 是巴拿赫空间，所以 (D_N) 是具范数(3.4)的赋可列范空间. 因为 $(D_N) = \bigcap_{p=1}^{\infty} (D_N^p)$，所以空间 (D_N) 是完备的.

例3.3 在例2.4考虑的空间 $Z(G)$ $(G \triangleq \{z \mid |z| < a\})$ 内，引入范数组

$$\|x\|_p \triangleq \max_{|t| \leqslant a_p} |x(t)|.$$

这里 a_p 是严格单调增加而且收敛于 a 的实数序列，则 $Z(G)$ 为完备的赋可列范空间.

在赋可列范空间 X 内能引入距离

$$\rho(x, y) \triangleq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \cdot \frac{\|x - y\|_p}{1 + \|x - y\|_p},$$

使X度量化(证明留给读者). 当然随便引入距离是无意义的，重要的是能取距离$\rho(x,y)$在拓扑空间X内关于位移和连续性不变，即满足$\rho(x,y)=\rho(x-y,0)$，而且当$x\in X$，$\lambda_n\to 0$时，$\rho(\lambda_n x,0)\to 0$；又对于任意的$\lambda\in K$，$x_n\to 0$时($n\to\infty$)，$\rho(\lambda x_n,0)\to 0$ ($n\to\infty$).

对于可度量化的拓扑线性空间X，当它的距离关于位移和连续性不变时，称为**线性度量空间**. 显然，赋可列范空间也是线性度量空间. 事实上，上面引进的距离$\rho(x,y)$显然满足距离公理，而且关于位移不变. 为了证明它关于连续性不变，只要证明当$x_n\to 0$时，$\|x_n\|_p\to 0$对于任意p成立即可，于是

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{\|x\|_p}{1+\|x\|_p}$$

的每项趋于零，而且当$n\geqslant n_0$时，前n_0项的和小于ε，则所有项的和小于

$$\varepsilon+\sum_{p=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^p}=\varepsilon+\frac{1}{2^{n_0}}.$$

因此，当n充分大时，有$\rho(x_n,0)\to 0$.

局部凸而且完备的线性度量空间称为**弗雷希空间**，于是完备的赋可列范空间是弗雷希空间.

注：这里弗雷希空间的定义与通常定义有区别.

定理3.2 若F是弗雷希空间X内的闭、凸、中心对称和吸收集，则F包含零点的邻域.

证：因为F是吸收集，所以$\bigcup_{m=1}^{\infty}(mF)$覆盖$X$. 又因为$X$是第二范畴的，所以$F$不能是无处稠密的(参看第0章§2)，因此$F=\bar{F}$包含有内点，即存在着$x_0\in F$和0的均衡邻域$U$，使得$x_0+U\subset F$. 由于$F$与$U$都是对称的，于是$-x_0+U=-x_0-U\subset -F=F$. 由

F的凸性知对于任意的 $x\in U$, F包含

$$[x_0+x+(-x_0+x)]/2,$$

即$U\subset F$. □.

下面定理解决了赋可列范空间的赋范化问题.

定理3.3 完备的赋可列范空间X可以赋范化的充要条件是：存在自然数p_0,使得对于一切 $p\geqslant p_0$,都有$X=X_p$.

证：充分性.

假设从某一个下标 p_0 开始，一切 X_p 都等于X，由等式 $X_{p_0}=X_{p_0+1}$和范数$\|\cdot\|_{p_0}$弱于$\|\cdot\|_{p_0+1}$，这些范数等价. 特别，依范数$\|\cdot\|_{p_0}$的收敛性蕴涵依范数$\|\cdot\|_{p_0+1}$的收敛性，从而蕴涵依范数$\|\cdot\|_{p_0+2}$的收敛性等等，归根到底，依每一个范数收敛，即依X的拓扑收敛.反之，若序列$\{x_n\}$依X的拓扑收敛，则它依每一个范数收敛，特别，依范数$\|\cdot\|_{p_0}$收敛，于是得到关于每一个范数的拓扑等价. 取范数$\|\cdot\|_{p_0}$即可

必要性.

先证明下列引理：

引理 若赋可列范空间X的一切完备化空间X_p不同，则对于任意正数序列$\{M_p\}$，存在元素 $x\in X$，使得$\|x\|_p>M_p$.

证：易知，对于任意的自然数 p，任意常数C_1和C_2，存在元素 x，使得$\|x\|_p\leqslant C_1$而且$\|x\|_{p+1}>C_2$. 事实上，若不然，一方面，对于任意 $x\in X$，当$\|x\|_p\leqslant C_1$时，必有常数C_0，使得$\|x\|_{p+1}\leqslant C_0$，于是

$$\|x\|_{p+1}\leqslant\frac{C_0}{C_1}\|x\|_p.$$

另一方面，因为$\|x\|_p\leqslant\|x\|_{p+1}$，因此范数$\|\cdot\|_p$与$\|\cdot\|_{p+1}$等价，从而有$X_p=X_{p+1}$. 与假设矛盾.

任取x_1，使$\|x_1\|_1>M_1+1$；再取 x_2，使得$\|x_2\|_1\leqslant 1/2$而且$\|x_2\|_2>M_2+1+\|x_1\|_2$，…；取$x_p\in X$，使得$\|x_p\|_{p-1}\leqslant 1/2^{p-1}$，而且

$$\|x_p\|_p>M_p+1+\|x_1\|_p+\cdots+\|x_{p-1}\|_p,$$

等等. 于是级数$\sum_{p=1}^{\infty} x_p$依任意范数收敛，从而在X内收敛.事实上，当给定自然数P与自然数$p>P$时，$\|x_p\|_P \leqslant \|x_p\|_{p-1} \leqslant 1/2^{p-1}$. 设它收敛于$x$，则

$$\|x\|_p \geqslant \|x_p\|_p - \sum_{q>p} \|x_q\|_p - \sum_{q<p} \|x_q\|_p$$

$$> M_p + 1 + \|x_1\|_p + \cdots + \|x_{p-1}\|_p$$

$$- 1 - (\|x_1\|_p + \cdots + \|x_{p-1}\|_p) = M_p. \qquad \square$$

现在证明定理3.3 的必要性. 不失一般性，可以认为一切X_p都不相同，则其中拓扑不能由某一个范数确定. 用反证法.设空间X内的拓扑由某一个范数确定，易知每一个范数$\|x\|_p$在单位球$B_1(0) \triangleq \{x \mid \|x\| \leqslant 1\}$上有界(当然各自界于特定的常数)，否则必有序列$\{x_q\} \subset B_1(0)$，使得$\|x_q\|_p = a_q \to +\infty$，于是在$X$内$x_q/a_q \to 0$，从而$x_q/a_q$依每个范数趋于0，这和$\|x_q\|/\|a_q\| = 1$矛盾. 不妨设$\|x\|_p \leqslant M_p$，于是由引理，存在元素$x$，使得$\|x\|_p > pM_p$.

另一方面，对于任意的$x \in X$，有$\lambda \neq 0$，使得$\lambda x \in B_1(0)$，于是$\|\lambda x\|_p \leqslant M_p (p=1,2,\cdots)$. 这和$\|\lambda x\|_p > |\lambda| pM_p$矛盾. $\square$

例3.4 空间(D_N)不能赋范. 事实上，空间$X_p(p=1,2,\cdots)$显然不同.

由此例知，赋范空间虽然简单，却不包含像(D_N)这样简单而重要的空间.

2. 范数序列的可比较性与等价范数列

设X是由两列范数

$$\|x\|_p \leqslant \|x\|_{p+1}, \quad p=1,2,\cdots \tag{3.5}$$

$$\|x\|'_p \leqslant \|x\|'_{p+1}, \quad p=1,2,\cdots \tag{3.6}$$

所确定的赋可列范空间. 若对于每一个p，存在$q=q(p)$，使得$\|x\|_p \leqslant C\|x\|'_q$，则称范数序列(3.6)强于(3.5)(或(3.5)弱于(3.6)). 这时若依(3.6)的拓扑有$x_n \to x$，则依(3.5)的拓扑亦然；反

之我们有：

定理3.4 若依(3.6)的拓扑有$x_n \to x$时，依(3.5)的拓扑也有$x_n \to x$，则序列(3.6)强于序列(3.5)。

证： 若结论不成立，则对某一个p，必有序列$\{x_n\} \subset X$，使得$\|x_n\|_p > n\|x_n\|'_n$. 不妨认为$\|x_n\|_p = 1$，而

$$\|x_n\|'_n < \|x_n\|_p/n = 1/n,$$

于是$\|x_n\|'_n \to 0$. 但是因为$\|x_n\|_p = 1$，于是依序列(3.5)的拓扑$\{x_n\}$不收敛于0，和定理的条件矛盾. □

若序列(3.6)既强于又弱于序列(3.5)，则称它们是**等价的范数列**.

3. 有界集

定义3.3 设B是赋可列范空间X的子集. 若对于一切$x \in B$和一切自然数p有$\|x\|_p \leqslant C_p$，这里C_p是常数，则称B为**有界集**.

这个定义虽然与赋范线性空间的相应定义形式上相似，但实质上是有区别的. 例如，在赋范空间内，每一个球都是有界集，而且其一切倍覆盖全空间，然而，若完备空间X不能赋范化，却不存在它的倍覆盖全空间的有界集. 事实上，若元素$x \in A$，而A为有界集$\{x \mid \|x\|_p \leqslant C_p\}$，则有$\|x\|_p \leqslant C_p$，于是依定理3.3的引理，存在$x_0 \in X$，使得$\|x_0\|_p > pC_p$. 显然，集$A$的任意倍都不能包含$x_0$，因此任意有界集不能包含内点（否则它的某一个位移将包含0的邻域）. 由上述结论知，若X不能赋范，则有界集必无处稠密. 事实上，若有界集A在球$\|x - x_0\| < C$内稠密，由于A的闭包$\bar{A}$也有界（定理1.8的(5)），从而它不能包含内点，因此A无处稠密.

§4 连续线性算子与连续线性泛函

1. 连续线性算子

设X与Y是数域K上的两个线性空间，一切由X到Y内的线

性算子的集记为 $L(X,Y)$. 用自然方式确定的线性运算使$L(X,Y)$成为线性空间，恒等于 0 的算子起零元素作用.

显然，对于任意的 $f\in L(X,Y)$，都有 $f(0)=0$. 另一方面，集 $\{x \mid f(x)=0\}=f^{-1}(0)$称为算子 f 的**核空间**或**零空间**，记为$\ker f$或 $N_0(f)$. 易知，当且仅当$N_0(f)=\{0\}$时，f 是内射的.

定理 4.1 设X与Y是数域K上的拓扑线性空间，而且 $f\in L(X,Y)$，则下列命题等价：

(1) 存在$x_0\in X$，使得 f 在点x_0连续；

(2) f 在X的零点连续；

(3) f 在X内处处连续；

(4) f 在X内一致连续.

证： 显然有(4)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(2)，只须证(2)$\Longrightarrow$(1)$\Longrightarrow$(4).

(2)$\Longrightarrow$(1)：若 $x\longrightarrow x_0$，则 $x-x_0\longrightarrow 0$，于是$f(x-x_0)\longrightarrow 0$，从而

$$f(x)-f(x_0)=f(x-x_0)\longrightarrow 0,$$

所以 $f(x)\longrightarrow f(x_0)$.

(1)$\Longrightarrow$(4)：若 f 在点x_0连续，任取空间Y内 0 的开邻域U_Y，则由于Y是拓扑线性空间，于是$W_Y\triangleq U_Y+f(x_0)$是$f(x_0)$的开邻域. 由于 f 在x_0连续，所以存在X内 x_0 的开邻域W_X，使得 $x\in W_X$时，$f(x)\in W_Y$. 但是$U_X\triangleq W_X-x_0$是X内零的开邻域，因此当$y,z\in X$，而且$y-z\in U_X$时必有

$$f(y)-f(z)=f(y-z)\in W_Y-f(x_0)=U_Y.$$

即 f 在X上一致连续. □

定义 4.1 设X，Y为数域K上的拓扑线性空间，$f:X\longrightarrow Y$是线性算子. 若 f 将X内的有界集映为Y内的有界集，则称 f 为**有界线性算子**. 特别，当$Y=K$时，称 f 为**有界线性泛函**（参看第 0 章§5）.

定理 4.2 设X，Y为数域K上的拓扑线性空间，f 是从X到Y

内的连续线性算子，则 f 必为有界线性算子.

证：设M为X内任意的有界集，任取序列$\{y_n\}\subset f(M)$，则存在序列$\{x_n\}\subset M$，使得$f(x_n)=y_n$. 因为M有界，由定理1.19有$\frac{1}{n}x_n\to 0(n\to\infty)$，从而$\frac{1}{n}y_n=\frac{1}{n}f(x_n)\to 0(n\to\infty)$. 再由定理1.19知$\{y_n\}$有界，所以$f(M)$有界. □

反之未必成立，但有下列定理：

定理4.3 设X为满足第一可列公理的拓扑线性空间，f是从X到同一数域K上的拓扑线性空间Y内的有界线性算子，则f是连续的.

证：设$\{U_n\}_{n\in N}$是X内零点邻域基，而且$U_n\supset U_{n+1}(n=1,2,\cdots)$. 若$f$不连续，则在$Y$内有零点邻域$W$，使得对于任意的$\lambda\in K$，$f(\lambda U_n)\not\subset W$，于是存在序列$\{x_n\}(x_n\in U_n)$，有$f\left(\frac{1}{n}x_n\right)\overline{\in}W$，从而序列$\{f(x_n)\}_{n\in N}$在$Y$内无界. 但$\{x_n\}$有界，同假设矛盾. □

定理4.4 设线性算子A将拓扑线性空间X映到同一数域K上的拓扑线性空间Y内，则A是连续的必要条件(当X满足第一可列公理时也是充分条件)是：当$x_n\to 0$时$Ax_n\to 0$.

证：必要性是显然的. 只证充分性. 设A不连续，则由定理4.3，对某一个有界集$B\subset X$，使得$A(B)$非有界，从而存在序列$\{y_n\}$，$y_n=Ax_n$，使得$x_n\in B$时$y_n/n\overline{\in}W$，这里W是Y内0的某一个邻域. 因为$x_n/n\to 0$，因此$A(x_n/n)=y_n/n$不收敛于0，矛盾. □

定理4.5 设X,Y是数域K上的两个拓扑线性空间，A是从X到Y内的加法连续算子，而且当K是复数域C时$A(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}Ax$，则$A$是齐性的，从而是线性的.

证：我们的目的是证明对于任何数α，有$A(\alpha x)=\alpha A(x)$. 当K是实数域时，由A的加性知，对一切自然数n，有$A(nx)=nA(x)$.

又

$$A(x)=A(nx/n)=nA(x/n),$$

所以 $A(x/n)=(1/n)A(x)$. 于是当a是正有理数m/n时，$A\left(\frac{mx}{n}\right)=\frac{m}{n}Ax$. 又因为$A(0)=A(2\cdot 0)=2A(0)$，所以$A(0)=0$，从而

$$0=A(x-x)=Ax+A(-x),$$

即$A(-x)=-Ax$，因此，对一切有理数 r 有$A(rx)=rA(x)$.

现设a为实数，取有理数列$\{r_n\}$，使 $r_n\to a$，则对于每一个 r_n，有$A(r_nx)=r_nAx$. 令 $n\to\infty$，由A的连续性得$A(ax)=aAx$.

当K是复数域时，令 $a=a_1+\mathrm{i}\,a_2$，依条件得

$$\begin{aligned}A(ax)&=A((a_1+\mathrm{i}a_2)x)\\&=A(a_1x)+A(\mathrm{i}a_2x)\\&=a_1Ax+\mathrm{i}a_2Ax=aAx.\quad\Box\end{aligned}$$

注：当K是复数域时，若不假定$A(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}Ax$，则结论不成立.

例4.1 设X表示复数域K上的一维空间$\{ae\,|\,a\in K,e\in X\}$，A是从X到K中的加法连续线性泛函：

$$A((a+\mathrm{i}\beta)e)\triangleq a\quad(a,\beta\text{为实数}),$$

则 $A(\mathrm{i}e)=0\neq\mathrm{i}=\mathrm{i}A(e)$.

定理 4.6 设X,Y是数域K上的完备赋可列范空间，A是从X到Y上的一对一连续线性算子，则A的逆算子也是连续线性算子.

这个定理已由巴拿赫在X和Y都是弗雷希空间时建立起来，参看参考文献 2 第二章 § 5 定理 2 .

注：取$Ax=x$，我们可得如下结论：若X关于两个不同范数列的每一个都是完备赋可列范空间，而且一个序列强于另一个，则两个序列等价，于是自然有下列更严格的结果：

定理 4.7 设X,Y是数域K上的两个赋可列范的完备空间，

而且 $Y\subset X$. 又设在 Y 内 $y_n\to y^*$ 而且在 X 内 $y_n\to x^*$ 时 $x^*=y^*$（这时也称 X 和 Y 的拓扑是和谐的），则当 $x_n\to x$ 在 Y 内成立时，$x_n\to x$ 在 X 内也成立.

证： 取 $\|\cdot\|_p''\triangleq\max(\|\cdot\|_p,\|\cdot\|_p')$ 是 Y 内的新范数（这里 $\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_p'$ 依次是 X 与 Y 内原来的范数），则 Y 关于 $\|\cdot\|_p''$ 成为完备空间，而且由上面的注，Y 的新范数序列等价于前两个范数序列中的一个. □

系 若 X 依两个范数序列的任一个是完备赋可列范空间，而且如果两个对应的范数是和谐的，则这两个范数序列是等价的.

2. 复线性泛函与实线性泛函的关系

定义 4.2 设 X 是复数域 C 上的线性空间. 若把 X 考虑为实数域 R 上的线性空间时，f 是 X 上的线性泛函，则 f 也称为 X 上的**实线性泛函.**

定理 4.8 设 X 是复数域 C 上的线性空间，f 是 X 上的线性泛函. 若 $f_1=\mathrm{Re}f, f_2=\mathrm{Im}f$，即 f_1，f_2 依次是 f 的实部与虚部，则 f_1,f_2 是 X 上的实线性泛函，而且对于一切 $x\in X$，有

$$f(x)=f_1(x)-\mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x)=f_2(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}f_2(x). \tag{4.1}$$

证： 设 $\alpha,\beta\in\mathrm{R}, x,y\in X$，则

$$\begin{aligned}f(\alpha x+\beta y)&=\alpha f(x)+\beta f(y)\\&=\alpha f_1(x)+\alpha\mathrm{i}f_2(x)+\beta f_1(y)+\beta\mathrm{i}f_2(y)\\&=\alpha f_1(x)+\beta f_1(y)+\mathrm{i}[\alpha f_2(x)+\beta f_2(y)].\end{aligned} \tag{4.2}$$

另一方面，

$$f(\alpha x+\beta y)=f_1(\alpha x+\beta y)+\mathrm{i}f_2(\alpha x+\beta y). \tag{4.3}$$

比较 (4.2) 式与 (4.3) 式的实部与虚部即知 f_1，f_2 均为实线性泛函.

为了证明(4.1)式，首先注意，对于任意 $x\in X$，有

$$f(\mathrm{i}x)=f_1(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}f_2(\mathrm{i}x). \tag{4.4}$$

又由 f 的线性知

$$f(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}f(x)=\mathrm{i}f_1(x)-f_2(x).\tag{4.5}$$

比较(4.4)式与(4.5)式的实部与虚部知：

$$f_1(\mathrm{i}x)=-f_2(x)\quad 且\quad f_1(x)=f_2(\mathrm{i}x)\quad (\forall x\in X).$$

从而(4.1)式成立. □

注：定理 4.8 的后一部分启示我们如何只借助于复线性泛函的实部或虚部表示线性泛函. 反之，下边定理启示我们如何用实线性泛函确定复线性泛函.

定理 4.9 设 X 是复数域 C 上的线性空间，而且 f_1 是 X 上的实线性泛函. 若对于任意 $x\in X$，有

$$f(x)=f_1(x)-\mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x),$$

则 f 是 X 上的复线性泛函.

证明留作练习.

3. 连续线性泛函的等价性命题

定理 4.10 设 X 是复数域 C 上的拓扑线性空间，而且 f 是 X 上的线性泛函，则下列命题等价：

(1) f 在 X 上连续；

(2) $\mathrm{Re}f$ 是 X 上的连续实线性泛函；

(3) $\mathrm{Im}f$ 是 X 上的连续实线性泛函.

证明留作练习.

定理 4.11 若 f 是 T_1 型拓扑线性空间 X 上的非零线性泛函，则下列命题等价：

(1) f 在 X 上连续；

(2) f 的零空间 $\ker f$ 为闭集；

(3) $\ker f$ 不稠密于 X；

(4) 存在 $V\in\mathscr{U}_0$，使得 f 在 V 内有界.

证：(1)$\Longrightarrow$(2)：若(1)成立，则闭集 $\{0\}\subset K$ 的原像 $f^{-1}(0)$ 是闭集.

(2)$\Longrightarrow$(3)：因为 $f\neq 0$，故(3)显然成立. 事实上，若(3)

不成立，则 $\ker f = X$，于是 $f \equiv 0$，矛盾.

(3)$\Longrightarrow$(4)：若 $\ker f$ 不稠密于 X，即 $\ker f$ 的余集有非空内部，于是存在 $x_0 \in X$ 与 $W \in \mathscr{U}_0$，使得

$$(x_0 + W) \cap \ker f = \varnothing.$$

由零点的均衡邻域组成邻域基知，有零点的均衡邻域 $V \subset W$，从而

$$(x_0 + V) \cap \ker f = \varnothing.$$

若 $f(V)$ 非有界，则对任意 $a \in K$，存在 $x_1 \in V$，使得 $|a| < |f(x_1)|$. 令 $x_2 = x_1(a/f(x_1))$，则从 V 的均衡性知 $x_2 \in V$，而且有 $f(x_2) = a$，即 $f(V) = K$，从而 $f(V)$ 内有 $-f(x_0) \in K$. 令 $-x_0 = y \in V$，则 $f(x_0 + y) = 0$，这与 $(x_0 + V) \cap \ker f = \varnothing$ 矛盾. 所以(4)也成立.

(4)$\Longrightarrow$(1)：设存在 $V \in \mathscr{U}_0$ 及 $M > 0$，使得对于一切 $x \in V$ 都有 $|f(x)| < M$，则由数乘的连续性知对于一切 $\varepsilon > 0$，存在 $W = \dfrac{\varepsilon}{M} V \in \mathscr{U}_0$，而且由 f 的线性知

$$|f(W)| = \frac{\varepsilon}{M} |f(V)| < \varepsilon,$$

即 f 在零点连续. 由定理 4.1 知 f 连续. □

系 由平移是同胚映射知定理 4.11 中的零空间

$$\ker f = \{x \mid f(x) = 0\}$$

若换为任一集

$$N_a \triangleq \{x \mid x \in X, f(x) = a\},$$

相应结论仍成立. 这里 a 为一常数.

注：设 X, Y 均为拓扑线性空间，f 是从 X 到 Y 内的线性算子. 若定理中(4)成立，则 f 在 X 上连续，但是反过来仅当 Y 在零点存在"有界"邻域时，相应命题才成立.

定理 4.12 设 X 为拓扑线性空间，f 为 X 上的非零线性泛函，则下列命题等价：

(1) f 在 X 上连续；

(2) 存在连续半范数 $p(x)$，使得 $f(x)\leqslant p(x)$ 对于任意 $x\in X$ 成立；

(3) 存在非空开集 G，使得 $f(G)\neq K$.

证：(1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3)：若 f 在 X 上连续，则 $p(x)=|f(x)|$ 为一连续半范数，所以(2)成立，从而由 $p(x)$ 的连续性知它在零点连续，即存在 $U\in\mathscr{U}_0$ 使得 $|p(U)|<\varepsilon$，所以 $|f(U)|<\varepsilon$，当然 $f(U)\neq K$.

(3)$\Longrightarrow$(1)：若 $f(G)\neq K$，则有 $\alpha_0\in K-f(G)$，使得 $f^{-1}(\alpha_0)\cap G=\varnothing$. 因为 $f^{-1}(\alpha_0)$ 不稠密于 X，所以

$$N_{\alpha_0}(f)\triangleq\{x\mid f(x)=\alpha_0\}$$

不稠密于 X，由定理 4.11 的系即知 f 连续. □

4. 哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理的推论

满足 T_0 分离公理的(非零)局部凸空间同赋范线性空间一样，也存在足够多的非零连续线性泛函. 为此先介绍线性泛函的延拓定理.

定理 4.13 设 X 是复(实)局部凸空间，X_0 是 X 的一个复(实)线性子空间，则 X_0 上的任意连续线性泛函 f_0 必可延拓为 X 上的连续线性泛函 f.

注：定理中空间 X 与 X_0 均为实的或均为复的，因为在任何无穷维的复巴拿赫空间中，总存在一个实线性子空间，使得在其上有一个连续线性泛函不能保范延拓到全空间上去(参看参考文献27).

证：因为 f_0 连续，由定理 4.11 之(4)和定理 2.3 知存在零点的一个绝对凸、吸收的开邻域 W，使得 $y\in X_0\cap W$ 时，$|f_0(y)|<1$. 再由定理 2.2 知存在连续半范数 $p(x)$，使得

$$W=\{x\mid x\in X,p(x)<1\},$$

于是有 $|f_0(x)|\leqslant p(x)\ (\forall x\in X)$. 由哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理(第 0 章定理 5.5)知 f_0 能在整个空间 X 上延拓为 f，而且对一

切 $x\in X$，有$|f(x)|\leqslant p(x)$．再由定理 2.1 之（2）知 $p(x)$连续，所以$f(x)$在 X 上连续． □

由本定理可以推出一系列有意义的结果，例如：

系 1 设 X 为局部凸空间，则对任意的 $x_0\in X$ 和连续半范数 $p(x)$，存在 X 上的连续线性泛函 f_1，使得 $|f_1(x)|\leqslant p(x)$，而且 $f_1(x_0)=p(x_0)$．

证： 依第 0 章定理 5.5 之系，设

$$X_0=\{\lambda x \mid \lambda\in K\}.$$

由定理 4.13 有 f_0，使得$|f_0(x)|\leqslant p(x)$．令 $f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$．由哈恩-巴拿赫定理把 f_0 延拓到全空间 X 上即可． □

系 2 设 X 是满足 T_0 分离分理的局部凸空间．若对于任意的 $f\in X^*$，$f(x)=0$，则 $x=0$（对偶性）．

证： 若 $x\neq 0$，则由条件，X 可由分离的半范数组确定，即存在连续半范数 p，使得 $p(x)>0$，于是由系 1，可求出 $f\in X^*$，使得 $f(x)=p(x)\neq 0$，矛盾． □

注：系 2 建立了局部凸空间的最重要性质，即存在足够多的连续线性泛函．换句话说，这时 $X^*\neq\{0\}$，而在一般的拓扑线性空间中，可能有 $X^*=\{0\}$，例如 $S(0,1)$（参看例 4.1）．

由系 2 可直接推出下列结论：

系 3 设 X 是满足 T_0 分离公理的局部凸空间，则对于任意的 $x_1,x_2\in X$，若对于任何 $f\in X^*$，总有 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 $x_1=x_2$．

注：当我们定义上述具 T_0 分离公理的局部凸空间 X 中的网 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 弱收敛于 x_0 时，$f(x_\delta)\to f(x_0)$对一切 $f\in X^*$成立，则系 3 表示弱收敛的极限唯一．

系 4 设 X 为满足 T_0 分离公理的局部凸空间，X_0 为 X 的线性子空间，$x_1\in X\setminus X_0$，则存在连续线性泛函 $f_1\in X^*$，使得 $f_1(x_1)=1$，$f_1(y)=0$（$\forall y\in X_0$）．

证： 令

$$X_1=\{\lambda x_1+y \mid \lambda\in K, y\in X_0\},$$

则 X_1 为 X 的子空间. 我们定义其上的泛函 f_1^0 为:

$$f_1^0(z)=\lambda \quad (z=\lambda x_1+y\in X_1).$$

显然 f_1^0 是线性的. 又因 X 满足 T_0 分离公理, 从而满足 T_3 分离公理(见定理 1.5), 于是点 x_1 与 X_0 可以分离, 于是也与 X_0 可以分离, 即 $\ker f_1^0=X_0$ 不是稠密于空间 X_1 的, 于是由定理 4.11 知 f_1^0 在 X_1 上连续. 再仿定理 4.13 的结果得到 f_1^0 在 X 上延拓的连续线性泛函 f_1, 易证 f_1 即为所求. □

定理 4.14(拉萨尔(Lasalle)定理) 拓扑线性空间 X 上存在非零连续线性泛函的充要条件是: X 有一个不空而且不等于 X 本身的均衡开、凸子集.

证: 必要性.

设 f 是 X 上的一个非零连续线性泛函, 令

$$A=\{x \mid |f(x)|<1\},$$

则 $0\in A$, 而且 A 是开集. 任取 $x, y\in A$, 则当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}&|f(\lambda x)+(1-\lambda)y)|\\ \leqslant&\lambda|f(x)|+(1-\lambda)|f(y)|<1,\end{aligned}$$

从而 A 是凸集. 因为 f 不恒为 0, 故必有 $x_0\in X$, 使得 $f(x_0)\neq 0$, 所以 $f(x_0/f(x_0))=1$, 即 $x_0/f(x_0)\overline{\in} A$. 因此 $A\neq X$. 显然, A 是均衡的.

充分性.

设 A 是 X 的一个不空开、凸、均衡子集, 而且 $A\neq X$. 取 A 的闵可夫斯基泛函

$$\mu_A(x)\triangleq\inf\{a \mid x\in aA\},$$

则由定理 2.2 知 $\mu_A(x)$ 是半范数, 它不恒等于 0. 事实上, 依假定存在 $x_0\in X$, 而且 $x_0\overline{\in} A$. 设存在 $\lambda(0<\lambda<1)$ 使 $x_0\in\lambda A$. 又因为 $0\in A$, 依 A 的凸性可知

$x_0=(1-\lambda)0+|\lambda|x_0/|\lambda|\in A$. 矛盾. 特别, 当 $0<\lambda<1$ 时,

$x_0 \overline{\in} \lambda A$,即 $\mu_A(x) \neq 0$.

于是由定理 4.13 之系 1, X 上存在一个实连续线性泛函 f,使得对于每一个 $x \in X$,有$|f(x)| \leqslant \mu_A(x)$,而且 $f(x_0) = \mu_A(x_0) \neq 0$. □

例 4.2 考虑空间$S(0,1)$,它由闭区间$[0,1]$上的一切几乎处处有限的可测函数组成. 令范数

$$\|x\| = \int_0^1 \{|x(t)|/[1+|x(t)|]\}\mathrm{d}t,$$

则 $S(0,1)$ 成为拓扑线性空间. 这时其中含零点的开凸子集必与全空间相同. 事实上,设球 $B_\varepsilon(0)$含于开凸子集 U 内. 任取 $x_0 \in S(0,1)$,取 $n > 1/\varepsilon$,并令

$$x_k(t) = \begin{cases} n x_0(t), & t \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

则 $$\|x_k\| = \int_{(k-1)/n}^{k/n} \{|x_k(t)|/[1+|x_k(t)|]\}\mathrm{d}t \leqslant 1/n < \varepsilon.$$

从而$x_k \in B_\varepsilon(0) \subset U$. 由$U$的凸性知 $x_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \in U$,所以 $S(0,1) = U$,因此 $S(0,1)$上没有非零的连续线性泛函.

5. 共轭空间

在拓扑线性空间 X 上一切连续线性泛函用平常方式引进线性运算,使它成为线性空间,称为它的**共轭**(或**对偶**)**空间**,记为 X^*或 X'.

若 X 是赋范线性空间,则 X^* 依范数

$$\|f\| \triangleq \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

成为赋范线性空间.

设 X 是赋可列范空间,记 X_p^*为 X_p 的共轭空间,X_p^* 的元素能恒同于 X 上不大于 p 阶的连续线性泛函(即依空间 X_p 的范数

连续的线性泛函）.显然，p 阶连续线性泛函在球

$$\|x\|_{p+1}\leqslant 1,\ \|x\|_{p+2}\leqslant 1,\cdots$$

上有界，因此，p 阶连续线性泛函也属于 X_{p+1}^*，X_{p+2}^*，…．于是我们得到了一系列包含关系 $X_1^*\subset X_2^*\subset\cdots\subset X_p^*$.

实际上，因为 $X^*=\bigcup_{p=1}^{\infty}X_p^*$，若 f 是 p 阶连续线性泛函，则对于一切$q\geqslant p$，范数

$$\|f\|_q\triangleq\sup_{\|x\|_q\leqslant 1}|f(x)|\geqslant\|f\|_p,$$

而且有$\|f\|_p\geqslant\|f\|_{p+1}\geqslant\cdots$.

下面讨论有界集.

在赋范线性空间 X内集 B 当且仅当

$$|f(B)|\triangleq\sup_{x\in B}|f(x)|<+\infty$$

时有界.类似地，有

定理 4.15　赋可列范空间 X 内的集 B 有界的充要条件是：对于任意的 $f\in X^*$，有 $|f(B)|<+\infty$.

证：设 B 有界．若 $f\in X^*$，则对于某一个自然数 p，$f\in X_p^*$. 因为 B 在每一个赋范线性空间 X_p 内有界，所以 $|f(B)|<\infty$．反之，若对于任意 X_p^* 内的任意 f，$|f(B)|<\infty$，则 B 在每一个 X_p 内都有界，从而在 X 内有界．□

§5　强拓扑与弱拓扑

1.强拓扑

设 X 是拓扑线性空间，我们定义 X^* 内零点的**强邻域**为集

$$V(A,\varepsilon)\triangleq\{f|\ |f(A)|<\varepsilon\},$$

这里，A 是 X 内的任意有界集，ε 是任意正实数．易证定理 1.6 的条件成立，于是用强邻域作为零点的邻域基可定义 X^* 的拓扑，我们称这种拓扑为**强拓扑**．对于赋范线性空间，它同范数 $\|f\|$ 的拓

扑重合. 依强拓扑收敛的序列称为**强收敛**序列. 强有界性、强闭包等概念可类似定义.

定理 5.1 若X满足第一可列公理，则X^*依强拓扑是完备的.

证： 若$\{f_n\}$是依强拓扑的柯西序列，则对于任意的$x\in X$，$\{f_n(x)\}$是柯西数列. 令$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，则$f$是线性的，而且对任意有界集$A\subset X$，因为$\{|f_n(A)|\}$是有界序列，从而$|f(A)|<\infty$. 由定理 4.3，$f$是连续的. 又显然依强拓扑$f_n\longrightarrow f$. □

定理 5.2 当且仅当集$B'\subset X^*$在每一个有界集$A\subset X$上有界，即当且仅当对任意有界集$A\subset X$，有

$$|B'(A)|\triangleq\sup_{f\in B'}|f(A)|<\infty$$

时，B'是强有界集.

证： 设B'强有界，则对于任意强邻域$V(A,1)$，存在$\lambda>0$，使得$B'\subset\lambda V(A,1)$，于是$|B'(A)|<\lambda$. 反之，若对于任意有界集$A\subset X$，$|B'(A)|<\infty$，则对于X^*内零点的任意强邻域$V=V(A,\varepsilon)$和$\mu>|B'(A)|/\varepsilon$时B'包含在μV内，所以B'强有界. □

定理 5.3 若X满足第一可列公理，则集$B'\subset X^*$为强有界的充要条件是：它的每一个元素在X内零点的某一个邻域上有界.

证： 必要性. 若结论不真，则存在序列$\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$，$x_n\in U_n$（这里$U_n\supset U_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，$\{U_n\}$是X内零点邻域基.），又有序列$\{f_n\}\subset B'$，使得$|f_n(x_n)|\longrightarrow\infty$，和序列$\{x_n\}$的有界性矛盾.

充分性. 任取$f\in B'$，则$\exists U\in\mathscr{U}_0$，使得$f$在$U$上有界. 对$X$内每一个有界集$A$，$\exists M>0$，使得$|f(A)|\leqslant M$，于是$|B'(A)|=\sup\limits_{f\in B'}|f(A)|\leqslant M$. 由定理 5.2 知$B'$是强有界的. □

定理 5.4 设X是赋可列范空间，集$B'\subset X^*$是强有界的充要条件是：它包含在某一个X_p^*内，而且依X_p^*的范数$\|\cdot\|_p$有界.

证： 若$B'\subset X_p^*$，而且依X_p^*的范数有界，则B'在X内零点的邻域

$$\{x \mid x \in X, \|x\|_p \leq 1\}$$

上有界，因而在X内任意有界集上有界，由定理 5.2 知B'强有界. 反之，若B'是强有界的，则由定理 5.3 知B'在X内零点的某一个邻域

$$U = \{x \mid \|x\| < \delta\}$$

上有界. 令$|B'(U)| \leq M$，则$B' \subset X_p^*$，而且对任意$f \in B'$，$\|f\|_p < M/\delta$. ▯

2. 弱拓扑

X^*内零点的弱邻域定义为

$$V \equiv V(x_1, x_2, \cdots, x_m; \varepsilon)$$
$$\triangleq \{f \mid |f(x_i)| < \varepsilon, f \in X^*, i = 1, 2, \cdots, m\},$$

这里$x_i \in X$（$i = 1, 2, \cdots, m$），m为自然数.

同样，用弱邻域作为零点的邻域基可定义X^*的弱拓扑. 弱收敛性、弱闭包、弱有界性等概念可类似地定义. 弱拓扑显然弱于强拓扑. 显然，对于任意$x \in X$，有$f_n(x) \longrightarrow f(x)$时，序列$\{f_n\}$弱收敛于$f$.

定理 5.5 设X是赋可列范空间. 若序列$\{f_n\} \subset X^*$对于X的稠密子集A内的任意点x，总有$f_n(x) \longrightarrow 0$，而且是强有界的序列，则对于任意$x \in X$，$f_n(x) \longrightarrow 0$（$n \longrightarrow \infty$）.

证： 由定理 5.4，f_n是某个X_p^*内的有界集，而且对于任意$x \in A$，有$f_n(x) \longrightarrow 0$. 由于A在X内稠密，所以它在X_p内稠密，再化为赋范线性空间来证即可. ▯

注：集B'弱有界的充要条件是：对于任意$x \in X$，$\sup\limits_{f \in B'} |f(x)| < \infty$. 强有界集显然是弱有界的. 对于完备赋可列范空间而言，弱有界集也强有界，即有以下定理：

定理 5.6 设X是完备赋可列范空间，则X^*的弱有界集必为强有界集.

证： 设B'是弱有界集，令

$$F=\{x\mid x\in X,\ |f(x)|\leqslant 1,\ \forall f\in B'\},$$

则F是闭、凸、对称与吸收集。由定理 3.2，F包含X内零点的邻域U。因为B'在U上有界，它在X的任意有界子集上也有界，由定理 5.2 知B'强有界。 □

系 设X是完备赋可列范空间，则X^*内的弱收敛序列是强有界的。

定理 5.7 设X是完备赋可列范空间，则X^*关于弱拓扑是完备的。

证： 设$\{f_n\}$是柯西序列，则对于任意$x\in X$，$f(x)\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$存在。由定理 5.6 知，对于任意有界集$A\subset X$，存在常数$C$，使$|f_n(A)|\leqslant C$，因此$|f(A)|\leqslant C$，而且由定理 4.3 知$f$连续，最后，$\{f_n\}$弱收敛于$f$成立。 □

定理 5.8 设X是完备赋可列范空间，则X^*内的序列$\{f_n\}$弱收敛于f的充要条件是：f_n与f都属于同一个X_p^*，而且在X_p^*内$\{f_n\}$弱收敛于f。

证： 设在X^*内$\{f_n\}$弱收敛于f，则$\{f_n\}$是强有界集。由定理 5.4，它们同属于某个X_p^*内，而且在其中组成有界集。不失一般性，假定f也属于同一个X_p^*。由于X在X_p内稠密，而且在X上有$f_n(x)\longrightarrow f(x)$，从而对任意$x\in X_p$也收敛。反之是平常的。 □

3. X内的强拓扑与弱拓扑

通过X^*的强拓扑与弱拓扑能定义X的两种拓扑。

(1) **强拓扑：** 用X内零的强邻域

$$V=V(B',\varepsilon)\triangleq\{x\mid |f(x)|<\varepsilon,f\in B'\}$$

定义，这里B'是X^*内的任意强有界集，$\varepsilon>0$。

(2) **弱拓扑：** 用X内零的弱邻域

$$W=W(f_1,\cdots,f_m;\varepsilon)\triangleq\{x\mid |f_i(x)|<\varepsilon,i=1,2,\cdots,m\}$$

定义，这里$f_1,\cdots,f_m$都在X^*内变化，m是任意正整数，$\varepsilon>0$。

显然，弱拓扑弱于强拓扑．一般说来，X的三种拓扑——原来拓扑、强拓扑与弱拓扑都不相同，但在完备赋可列范空间内却有：

定理 5.9 若X是完备赋可列范空间，则X的拓扑等价于它的强拓扑．

证： X内零点的每一个邻域$V\triangleq\{x\mid \|x\|_p<\varepsilon\}$也是零点的强邻域．事实上，若$x\in V$，则对于

$$B'\triangleq\{f\mid f\in X_p^*,\ \|f\|_p\leqslant 1\}$$

内一切f，都有$|f(x)|<\varepsilon$．反之，若对于一切$f\in B'$，有$|f(x)|<\varepsilon$，则取f，使得$f(x)=\|x\|_p$，从而$x\in V$．因为B'强有界，故V是0的强邻域．

反之，零点的每一个强邻域包含原来拓扑的零点的邻域．设U是X内零点的强邻域，即

$$U\triangleq\{x\mid |f(x)|<\varepsilon,\ \forall f\in B'\},$$

这里B'是X^*内的强有界集．由定理 5.4，存在自然数p，使得对于一切$f\in B'$，$B'\subset X_p^*$，而且$\|f\|_p\leqslant C$，因此U包含集

$$U_0\triangleq\{x\mid |f(x)|<\varepsilon/C,\ \forall f\in X_p^*, \|f\|_p=1\}.$$

而U_0恒等于X内零点的邻域$\{x\mid \|x\|_p<\varepsilon/C\}$，因此二邻域组等价．　□

定理 5.10 若X是完备赋可列范空间，则X内的集A是强有界的充要条件是A弱有界．

证： 显然，强有界性蕴涵弱有界性．反之，设A是弱有界集，则当λ充分小时，λA包含在任意给定的零点的弱邻域内，因此对于任意的$f\in X^*$，对于一切$x\in A$时$|f(x)|<C$，这里C是依赖于f的常数．由定理 4.15 知A有界．　□

系 在完备赋可列范空间内，弱收敛序列是强有界的．

证： 因弱收敛序列是弱有界的．　□

§6 完全空间

在有限维空间中，每个有界集都是相对紧的．这种性质在分析中起着重要作用．另一方面，在赋范线性空间中有黎斯定理：若空间 X 内每一个有界集都是相对紧的，则 X 必为有限维的．因此，对于有界集是相对紧的赋范线性空间，从泛函分析观点看来意义不大．然而如果离开赋范线性空间而讨论拓扑线性空间，则其中一切有界集都是相对紧的一类空间，对分析来说就显得重要了．这类空间就是完全空间．

1. 完全空间概念

在拓扑线性空间 X 内，若 $A\subset X$ 是列紧的，则 A 有界．事实上，若不然，将存在零点邻域 U 与序列 $\{x_n\}\subset A$，使得 $x_n/n\bar{\in} U$，但这时 $\{x_n\}$ 的任何子列 $\{x_{n'}\}$ 都不收敛，因为，若 $x_{n'}\longrightarrow x$，设 V 是零点的均衡邻域，使得 $V+V\subset U$，由于 $x/n'\in V$，而且对充分大的 n'，有 $(x-x_{n'})/n'\in V$，从而 $x_{n'}/n'\in U$，矛盾．

若 $A\subset X$ 是紧的，则 A 是有界的．事实上，对零点的任意均衡邻域 U，任意给定 $x\in X$，假定 $\lambda=\lambda_x$ 充分大，则 $x\in\lambda U$，于是从覆盖 A 的集 λU 中可选取有限多个，例如 $\lambda_1 U,\lambda_2 U,\cdots,\lambda_m U$ 仍然覆盖 A．令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|\lambda_i|$，则 $A\subset\lambda U$．

上述两个命题之逆一般不成立．

定义 6.1 设 X 是完备赋可列范空间．若 X 内每一个有界集是相对列紧的，则称 X 是**完全空间**．因 X 是完备度量空间，若我们用紧性代替列紧性，便得到等价的定义．

设 X 是局部凸空间．若 X 内每一个闭、凸、对称与吸收集必包含 0 的邻域而且有界集是相对紧的，则称 X 是**孟德尔 (Montel) 空间**．显然，完全空间是孟德尔空间．

下面我们给出判定完全空间的条件．

定理 6.1　设 X 是完备赋可列范空间，$\{p_n\}$ 是正整数的增加序列．若从依 $\|\cdot\|_{p_{n+1}}$ 有界的任意集 $A\subset X$ 都能选出依 $\|\cdot\|_{p_n}$ 的柯西序列，则 X 是完全空间．

证： 只需证明每一个有界集 $A\subset X$ 是紧的．因为集 A 依范数 $\|\cdot\|_{p_2}$ 有界，于是它包含依范数 $\|\cdot\|_{p_1}$ 的柯西序列：$x_{11},x_{12},\cdots,x_{1p},\cdots$．此序列依范数 $\|\cdot\|_{p_3}$ 有界，从而包含依范数 $\|\cdot\|_{p_2}$ 的柯西序列：$x_{21},x_{22},\cdots,x_{2p},\cdots$．继续下去，就得无限阵：

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1p}, & \cdots \\ x_{21}, & x_{22}, & \cdots, & x_{2p}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \cdots, & x_{np} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

其中第 n 个序列依范数 $\|\cdot\|_{p_{n-1}}$ 是柯西序列．于是对角线序列 $\{x_{nn}\}$ 依每一个范数 $\|\cdot\|_{p_j}(j=1,2,\cdots)$ 都是柯西序列，从而依每一个范数 $\|\cdot\|_p$ 也是柯西序列，即它是 X 内的柯西序列，因此有极限 x_0，即 X 是完全空间．　□

例 6.1　(D_N) 是完全空间．

证： 设 $A\subset(D_N)$ 依范数

$$\|x\|_p \triangleq \max_{p\geq 1}\{|x(t)|,\cdots,|x^{(p)}(t)|\}$$

有界．因为函数 $x^{(p-1)}(t)\,(x\in A)$ 的一阶导函数依条件有界，则由阿斯科里-阿尔采拉 (Ascoli-Arzela) 定理，从其中能选出在紧集 N 上一致收敛的序列：$x_1^{(p-1)}(t),\cdots,x_n^{(p-1)}(t),\cdots$．由于一切函数 $x_n(t)$ 的小于 $p-1$ 阶的一切导函数可由序列 $\{x_n^{(p-1)}(t)\}$ 求积分得到，于是它们也组成紧集 N 上的一致收敛序列，即序列 $\{x_n(t)\}$ 依范数 $\|\cdot\|_{p-1}$ 收敛．因此 A 依范数 $\|\cdot\|_p$ 是紧的，即 (D_N) 是完全空间．

定理 6.2　在完全空间 X 内，弱收敛重合于强收敛．

证： 只要证明弱收敛蕴含强收敛即可．设 $x_n\longrightarrow 0$(弱)，由定

理 5.10 的系，它强有界，于是相对列紧. 因为，若序列$\{x_n\}$不强收敛于 0，则必存在强收敛从而弱收敛于某一个$x\neq 0$的子序列$\{x_{n_k}\}$，这不可能. □

定理 6.3 完全空间X对于弱拓扑是完备的.

证： 设序列$\{x_n\}\subset X$是弱柯西序列，则对于任意$f\in X^*$，数列$\{f(x_n)\}$收敛，即$\{x_n\}$弱有界. 由定理 5.10，它也强有界，从而是相对列紧的. 由于X满足第一可列公理，所以它包含有强收敛于$x\in X$的子序列$\{x_{n_k}\}$. 再由f的连续性知$f(x_{n_k})\longrightarrow f(x)$. 而序列$\{f(x_n)\}$本身是收敛的，所以$f(x_n)\longrightarrow f(x)$，即$\{x_n\}$弱收敛于$x$，从而$X$关于弱拓扑是完备的. □

定理 6.4 若X是完全空间，则共轭空间X^*内的弱收敛重合于强收敛.

证： 设对于任意$x\in X, f_n(x)\longrightarrow 0 (n\longrightarrow\infty)$，则在$X$的任意有界子集内一致地有$f_n(x)\longrightarrow 0$，否则必在某一有界子集$A$内有序列$\{x_n\}$和正数$\varepsilon$，使得$|f_n(x_n)|>\varepsilon$. 又因序列是有界的，必有子序列$\{x_{n_k}\}$是强收敛的，设收敛于$x$，于是对于$X^*$内任意有界集$B'$，在$B'$上一致地有$f(x_n-x)\longrightarrow 0$. 特别，取$B'=\{f_{n_k}\}$得

$$f_{n_k}(x_{n_k})=f_{n_k}(x_{n_k}-x)+f_{n_k}(x)\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty),$$

矛盾. 反之显然成立. □

我们还可以得到下列更精确的定理.

定理 6.5 设X满足定理 6.1 的假设，序列$\{f_n\}$弱(或强)收敛于 0，则存在自然数p，使得依X_p^*的范数有$f_n\longrightarrow 0$，反之是平常的.

证： 因为序列$\{f_n\}$是有界集，因此对某一个自然数r，有$\|f_n\|_r<C$. 由于X在X_r内稠密，所以$\{f_n\}$在X_r^*内弱收敛于 0. 设p是使得X_p内每一个有界集都在X_r内相对列紧的自然数，则$\|f_n\|_p<C$，而且在X_p^*内f_n也收敛于 0. 下面证明$\|f_n\|_p\longrightarrow 0$. 事实上，若结论不成立，必在$X_p$的某一个有界集$A$内有序列$\{x_n\}$与

$\varepsilon>0$,使得 $|f_n(x_n)|>\varepsilon$. 取$\{x_{n_k}\}$是 X_r 内的收敛子序列,而且记它的极限为 x,得

$$|f_{n_k}(x_{n_k})|\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k}-x)|+|f_{n_k}(x)|$$
$$\leqslant\|f_{n_k}\|_r\|x_{n_k}-x\|_r+|f_{n_k}(x)|\longrightarrow 0,$$

矛盾. □

2. 共轭空间内的有界集

若X是完全空间,则X^*不再是完全空间,因为它不是赋可列范空间,但是X^*内的有界子集也是相对列紧的. 为此,先证明下列定理:

定理 6.6 若X是可分的完备赋可列范空间,则X^*内的每一个有界集依弱拓扑是相对列紧的.

证: 设$\{x_n\}$是X内的稠密序列,给定任意无限有界集$B'\subset X^*$,选取对于每一个x_m收敛的无限序列$\{f_n\}$(仿定理6.1之证,由标准的对角线方法作出). 由于$\{x_n\}$在X内稠密,从而在某一个X_p内稠密,因此$\{f_n\}$在X_p内弱收敛于$f\in X_p^*$. 特别,由于对于某一个p,有$\|f_n\|_p<C$,于是对于任意$x\in X$,都有$f_n(x)\longrightarrow f(x)$,即$\{f_n\}$在$X$上弱收敛,而且它的弱极限$f\in X^*$. □

为了证明完全空间的共轭空间内有界子集的相对列紧性,只需证明下列定理:

定理 6.7 完全空间是可分的.

证: 若一切空间X_p都是可分的,则在每一个X_p内可取可数稠密子集$S_p\subset X$,则$\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}S_p$在$X$内稠密. 事实上,若$x\in X$,必存在$x_p\in S_p$,使得$\|x_p-x\|_p<1/p$对任意$p$成立. 因为$p\geqslant k$时,

$$\|x_p-x\|_k\leqslant\|x_p-x\|_p,$$

所以在X内$x_p\to x$.

为了完成证明,我们要证明一切X_p都是可分空间. 若不然,一定存在不可分空间X_{p_0},为简单起见,取$p_0=1$. 若对于任意

$n\in\mathrm{N}$，在X内存在序列$\{x_n\}$，使得对于任意$x\in X_1$和某一个$i\in\mathrm{N}$，有$\|x-x_i\|_1<1/n$，则X_1应是可分的，因此存在$\varepsilon=1/n_0$，使得任意序列$\{x_n\}$无上述性质．现在考虑有下列性质的一切集$A\subset X$的全体：对于A内的任意两点x和y，使得$\|x-y\|_1\geqslant\varepsilon$．依$A\subset B$定义半序$A\leqslant B$，则集$A$的每一个全序子集有上界，即它们的并．由曹恩引理（见第0章§1），存在极大集，记为Z，即$Z\leqslant A$时必有$Z=A$．显然，对于任意的$x,y\in Z$，有$\|x-y\|_1\geqslant\varepsilon$．而且对于任意$t\in X$，有$x\in Z$，使得$\|t-x\|_1<\varepsilon$．所以$Z$是不可数的．

因为X包含在球$\|x\|_1<m(m=1,2,\cdots)$的并内，则对于某一个m_1，

$$Z_1\triangleq Z\cap\{x\mid \|x\|_1<m_1\}$$

是不可列的．类似地，对某一个m_2，集

$$Z_2=Z\cap\{x\mid \|x\|_2<m_2\}$$

是不可列的，等等．继续下去，得到对于任意自然数p，在X_p内有界集

$$Z_p=Z\cap\{x\mid \|x\|_p<m_p\}$$

是不可列的．对于任意自然数p，在Z_p内取x_p，使得当$p\neq q$时，$x_p\neq x_q$．于是我们得到一个在X内有界而没有收敛子序列的序列，这同X是完全空间的假设矛盾． □

综合定理6.4、定理6.6与定理6.7我们得到

定理6.8 若X是完全空间，则X^*内的有界集依弱拓扑与强拓扑都是相对列紧的．

3. 抽象函数的积分

设$x=x(t)$是从闭区间$[a,b]$到完全空间X内的连续函数．对于任意$f\in X^*$，复合函数$f(t)=f(x(t))$也连续，而且积分

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\triangleq\lim_{\|\Delta t\|\to0}\sum f(x(t_j))\Delta t_j$$

存在，这里$\|\Delta t\|\triangleq\max\limits_j\Delta t_j$，$\Sigma$为有限和．因为右边等于

$$\lim f(\sum x(t_j)\Delta t_j),$$

而 $\sum x(t_j)\Delta t_j$ 弱收敛，而且由定理 6.2 知 $\sum x(t_j)\Delta t_j$ 在 X 内收敛，记这个极限为 $\int_a^b x(t)\,dt$，称为 $x(t)$ 从 a 到 b 的**积分**，即

$$\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{\|\Delta t\|\to 0} \sum x(t_j)\Delta t_j. \tag{6.1}$$

上式左边满足标准积分的一切基本性质．特别有：

$$\lim_{b\to a} \frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)\,dt = x(a), \tag{6.2}$$

$$\left\|\int_a^b x(t)\,dt\right\|_m \leqslant \int_a^b \|x(t)\|_m dt. \tag{6.3}$$

第一个公式由应用任意 $f\in X^*$ 于两边得到，而第二个公式可直接从(6.1)式得到．

积分定义能立刻推广到 $t=(t_1,\cdots,t_n)$ 的情形，标准重积分的基本性质在这里也成立．

4. 算子序列的弱收敛性

设 X 和 Y 是数域 K 上的拓扑线性空间，考虑从 X 到 Y 内的连续线性算子的全体，当以自然方式定义加法与数乘时组成线性空间．若 $X=Y$，则定义算子 A，B 之积 AB 为：

$$(AB)x = A(Bx) \quad (x\in X).$$

映 X 到 Y 内的连续线性算子 A 的**共轭算子** A^* 定义为

$$(A^*g, x) = (g, Ax), (x\in X, g\in Y^*)$$

则 A^* 是从 Y^* 到 X^* 内的线性算子．容易看出，当 X^* 与 Y^* 同时赋予强拓扑或弱拓扑时，A^* 也是连续算子．若 A 是从 X 到 Y 上的同胚映射，则 A^* 是从 Y^* 到 X^* 上的同胚映射．

若对于任意 $x\in X$，依强(弱)拓扑有 $A_n x \longrightarrow Ax\ (n\to\infty)$，则称序列 $\{A_n\}$ 依强(弱)拓扑收敛于 A．

定理 6.9 设 X 和 Y 都是完备赋可列范空间，$A_n(n=1,2,\cdots)$ 是从 X 到 Y 内的连续线性算子．若 A_n 弱收敛于 A，则 A 也是连续

线性算子.

证： A显然是线性的. 对于任意 $g\in Y^*$,定义

$$f_n(x)=g(A_nx),\quad f(x)=g(Ax),$$

则 $f_n\in X^*$, 而且 f_n 弱收敛于 f. 由定理 5.6 的系，f 在有界集 $B\subset X$ 上有界,即对于任意 $g\in Y^*$,集$\{g(Ax)\mid x\in B\}$是有界的. 由定理 4.15,对于任意有界集 $B\subset X$,集$\{Ax\mid x\in B\}$有界,从而 A 是有界线性算子. 由定理 4.3，它是连续的. □

§7 拓扑线性空间的归纳极限与并

在 § 4 内研究赋可列范空间时，我们曾得到$X^*=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}X_p^*$，而且 X^* 内的收敛性和有界性可转化为 X_p^* 内的相应性质. 这启示我们把它们推广到一般情形.

1. 局部凸空间的归纳极限

定义 7.1 设 $X^{(\alpha)}$与 X 都是局部凸空间，α 取遍某一个有向集 I,而且$X=\bigcup\limits_{\alpha\in I}X^{(\alpha)}$. 又假设 $\alpha\leqslant\beta$ 之意为 $X^{(\alpha)}\subset X^{(\beta)}$而且 $X^{(\alpha)}$ 的拓扑强于 $X^{(\beta)}$ 的拓扑 (即从 $X^{(\alpha)}$到 $X^{(\beta)}$上的映射 $x\mapsto x$ 连续). 若下列性质成立:对于任意凸集$V\subset X$,当且仅当对于每一个$\alpha\in I$, $V\cap X^{(\alpha)}$ 都是 $X^{(\alpha)}$ 内零点的邻域时, V 是 X 内零点的邻域,则称 X 是 $X^{(\alpha)}$的**归纳极限**.

例 7.1 已知(D_N)是局部凸空间，当 N 取遍 $\mathbf{R}^n$ 内一切紧子集时,(D_N)的归纳极限是 $\mathscr{D}$. 证明见第三章定理 3.1.

下面我们总假设 X 为 $X^{(\alpha)}$的归纳极限.

定理 7.1 从空间 X 到局部凸空间 Y 内的线性算子 A 连续的充要条件是：A 在每个 $X^{(\alpha)}$内的限制是连续的.

证： 必要性. 设 A在 X 上连续，则对 Y 内零点的任意凸邻域

U, $A^{-1}(U)$是 X 内零点的凸邻域，因此 $A^{-1}(U)\cap X^{(\alpha)}$ 是 $X^{(\alpha)}$内零点的邻域，因此 A 在 $X^{(\alpha)}$上的限制连续.

充分性. 设 A 在每个 $X^{(\cdot)}$内的限制连续，则取 U 的意义如上. 对于任意 α, $A^{-1}(U)\cap X^{(\alpha)}$是$X^{(\alpha)}$内零点的邻域，因此$A^{-1}(U)$也是 X 内零点的邻域，从而 A 在 X 上连续. □

现在考虑 I 是序列的特殊情形. 设 $X^{(1)}\subset X^{(2)}\subset\cdots X^{(n)}\subset\cdots$, 而且设每一个 $X^{(n)}$的拓扑是由 $X^{(n+1)}$诱导的拓扑，则称 X 是 $X^{(n)}$ 的**严格归纳极限**. 当 $X^{(n)}$ 是弗雷希空间时，也称 X 为LF空间.

定理7.2 空间 X 内 $x_n\longrightarrow x$ 的充要条件是：x 与 x_n 都属于某一个 $X^{(m)}$, 而且在 $X^{(m)}$内，$x_n\longrightarrow x(n\to\infty)$.

证：充分性显然，只证必要性. 不失一般性，可取 $x=0$. 若 x_n 不是都属于某一个 $X^{(m)}$, 则存在两个序列 $\{x_{n'}\}$与$\{X^{(m')}\}$ ($m'=m'(n')$, 而且 m', n' 依次随 m, n 的增大而增大), 使得 $k'>n'$ 时，$x_{k'}\overline{\in}X^{(m')}$, 而当 $k'\leqslant n'$ 时，$x_{k'}\in X^{(m')}$. 对于每一个 m', 令 $V^{(m')}$是 $X^{(m')}$内 $k\leqslant n'$ 时不包含 $x_{k'}$ 的零点的凸邻域，则 $V^{(m')}\cap\{x_{k'}\}=\varnothing$. 因为 $V=\bigcup\limits_{m'}V^{(m')}$是 X 内不与集$\{x_n\}$相交的零点的邻域，这同在 X 内 $x_n\longrightarrow 0$ 的假设矛盾，因此存在 m_0, 使得$\{x_n\}\subset X^{(m_0)}$.

设对于一切 $m\geqslant m_0$ 时$\{x_n\}\subset X^{(m)}$, 我们必须证明在$X^{(m_0)}$内有 $x_n\longrightarrow 0$. 用反证法. 若结论不成立，则有零点的邻域 $W^{(m_0)}\subset X^{(m_0)}$, 使得 $W^{(m_0)}$不与$\{x_n\}$的某一个子序列相交. 为简便计，仍记此子序列为$\{x_n\}$, 则当 $m\geqslant m_0$ 时，令 $W^{(m)}$是 $X^{(m)}$ 内零点的邻域，而且使 $m\geqslant m_0$ 时，$W^{(m)}=X^{(m)}\cap W^{(m+1)}$. 因为$\{x_n\}\subset X^{(m_0)}$, 而 $W^{(m)}\cap\{x_n\}=\varnothing$, 因此得 $W=\bigcup\limits_{m\geqslant m_0}W^{(m)}$ 是 X 内零点的一个不与$\{x_n\}$相交的邻域，这与在 X 内有 $x_n\longrightarrow 0(n\longrightarrow\infty)$的假设矛盾. □

定理 7.3 空间 X 内子集 B 是有界集的充要条件是：B 包含在某一个 $X^{(m)}$ 内，而且是 $X^{(m)}$ 内的有界集.

证： 充分性显然，只证必要性.

若 B 不包含于某一个 $X^{(m)}$ 内，则仿上定理之证，必存在两个序列 $\{x_{n'}\}$ 与 $\{X^{(m')}\}$ 使得 $\{x_{n'}\}\subset B$，而且当 $k'>n'$ 时，$x_{k'}\overline{\in}X^{(m')}$，而 $k'\leqslant n'$ 时 $x_{k'}\in X^{(m')}$. 令 $V^{(m')}$ 是 $X^{(m')}$ 内使得 $k'\leqslant n'$ 时，$x_{k'}\overline{\in}m'V^{(m')}$ 的零点的邻域，则 $m'V^{(m')}\cap\{x_{k'}\}=\varnothing$. 又集 $V=\bigcup\limits_{m'}V^{(m')}$ 是 X 内零点的邻域，而且因为

$$k'V\subset\Big(k'\bigcup_{m'\leqslant k'}V^{(m')}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{m'>k'}m'V^{(m')}\Big),$$

对于任意自然数 k'，$\{x_{n'}\}$ 不包含于 $k'V$ 内，由于 V 是凸邻域，对任意 $\lambda>0$，有界集 $\{x_{n'}\}$ 不包含在 λV 内，这不可能.

设对于一切 $m>m_0$，有 $B\subset X^{(m)}$. 若 B 在 $X^{(m)}$ 内不是有界集，则对于 $X^{(m)}$ 内零点的某一个邻域 $W^{(m)}$，B 不包含于任意 $\lambda W^{(m)}$ 内，仿定理 7.2 之证，从 $W^{(m_0)}$ 构造 $W^{(m)}$，则 B 不包含于任意 $\lambda W^{(m)}$ 内，从而 B 也不包含于任意 λW 内，这里 $W=\bigcup\limits_{m\geqslant m_0}W^{(m)}$. 因为 W 是 X 内零点的邻域，这不可能. 所以定理成立. ▯

定理 7.4 若每一个 $X^{(m)}$ 是完备的，则 X 是完备的.

证： 仿上定理证之. ▯

若每一个 $X^{(m)}$ 满足第一可列公理，f 是 X 上的线性泛函，则当且仅当在 X 内 $x_n\longrightarrow 0$ 蕴含 $f(x_n)\longrightarrow 0$ 时，f 在 X 上连续. 又当且仅当 f 有界时，f 在 X 上连续.

定理 7.5 若每一个 $X^{(m)}$ 是完备赋可列范空间，则 X 的共轭空间 X^* 是依弱拓扑的完备空间.

证： 设 $\{f_n\}$ 是弱柯西序列，则它的极限 f 是每一个 $X^{(m)}$ 上的

连续线性泛函．再应用定理 7.1 即可． □

定理 7.6 若每一个 $X^{(m)}$ 都是完备赋可列范空间，而且 $B'\subset X^*$ 是弱有界的，即对于任意 $x\in X$，$\sup\limits_{f\in B'}|f(x)|<\infty$，则 B' 是强有界集，即对于 X 内任意有界集 A，有 $\sup\limits_{\substack{f\in B'\\x\in A}}|f(x)|<\infty$.

证： 由定理 7.3，A 包含于某一个 $X^{(m)}$ 内，因此 B' 在 $(X^{(m)})^*$ 内弱有界，应用定理 5.6 和定理 5.2 即可． □

定理 7.7 若 A 是从 X 到局部凸空间 Y 内的线性算子，而且每一个空间 $X^{(m)}$ 满足第一可列公理，则当且仅当 $x_n\longrightarrow 0$ 蕴含 $Ax_n\longrightarrow 0$ 时，A 是连续的.

定理 7.8 若 A 是从 X 到局部凸空间 Y 内的线性算子，而且每一个空间 $X^{(m)}$ 满足第一可列公理，则当且仅当 A 有界时，A 是连续的.

这两个定理的证明可由定理 7.1 至定理 7.3 以及定理 4.3 与 4.4 得到.

2. 拓扑线性空间的并

定义 7.2 设

(1) $X^{(m)}$ 都是拓扑线性空间($m=1,2,\cdots$)，而且 $X^{(1)}\subset X^{(2)}\subset\cdots\subset X^{(m)}\subset\cdots$，$X\triangleq\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}X^{(m)}$；

(2) $X^{(m)}$ 的拓扑强于由 $X^{(m+1)}$ 诱导的拓扑；

(3) X 为线性空间；

(4) 对于任意序列 $\{x_n\}\subset X$，当且仅当 x_n 和 x 同属于某一个 $X^{(m)}$，而且关于 $X^{(m)}$ 内的拓扑有 $x_n\longrightarrow x$ 时，x_n 在 X 内收敛于 x；

(5) 当且仅当集 B 包含于每一个 $X^{(m)}$ 内而且在 $X^{(m)}$ 内有界时，B 是 X 内的有界集；

则称 X 为空间序列 $\{X^{(m)}\}$ 的**可列并空间**.

例 7.2 空间K是赋可列范空间$K(\Omega)$的并，这里Ω取R^n内一切紧子集。

注：我们不能定义X的拓扑，然而能以自然方式继续定义线性泛函与线性算子的连续性与有界性概念如下：当且仅当线性泛函在每一个$X^{(m)}$上连续（有界）时，称f是连续（有界）的．一切连续线性泛函的集记为X^*，在X^*内能引入两种收敛概念：若对于任意$x\in X$，有$f_n(x)\longrightarrow 0$，则称f_n弱收敛于0；若关于X内有界集的每一点x，$f_n(x)$一致收敛于0，则称f_n强收敛于0．

设集$B'\subset X^*$．若对于任意$x\in X$（有界集$B\subset X$），复数集

$$\{f(x)\mid f\in B'\}\quad(\{f(x)\mid x\in B, f\in B'\})$$

是有界的，则称B'是弱（强）有界的．若$X^{(m)}$是完备赋可列范空间，则X^*内的弱有界性蕴含强有界性．

定理 7.1 至定理7.3的结论对上述定义仍成立，定理 7.4与定理7.5对可列并空间也保持正确（其中若$\{x_n\}$是某个空间$X^{(m)}$内的柯西序列，则称它是X内的柯西序列）．于是，若每一个$X^{(m)}$满足第一可列公理，则线性泛函f连续的充要条件是：它在X的每一个有界集上有界，或在X内$x_n\longrightarrow 0$时，$f(x_n)\longrightarrow 0$．而从X到Y内的线性算子A连续的充要条件是：A把X内的有界集映成Y内的有界集，或在X内$x_n\longrightarrow 0$时，在Y内有$Ax_n\longrightarrow 0$．此外，定理 4.3 也成立．

若Y也是空间$Y^{(m)}$的可列并空间，而且若一切$X^{(m)}$与一切$Y^{(m)}$都满足第一可列公理，则从X到Y内的线性算子连续的充要条件是：在X内$x_n\longrightarrow 0$时，在Y内有$Ax_n\longrightarrow 0$．显然，当且仅当A有界时，A是连续的．

若A连续，则如前定义A的共轭算子A^*．容易看出，当对于$X^{(m)}$和$Y^{(m)}$都定义有弱收敛与强收敛概念时，A^*是从Y^*到X^*内的连续算子．又设A_n $(n=1, 2, \cdots)$是从X到Y内的连续线性算子，若对于任意有界集$B\subset X$，存在着某一个$Y^{(m)}$包含集

$$\{A_n x \mid x \in B, n = 1, 2, \cdots,\},$$

而且对一切充分大的n，$Y^{(m)}$内零点的任意邻域包含集$\{A_n x | x \in B\}$时，则称 A_n 在 X 内的有界集上一致收敛于 0 .

可列并空间的概念能推广到集组$\{X^{(\alpha)}\}_{\alpha \in I}$，其中 I 是一个有向集，这时称 X 为 $X^{(\alpha)}$ 的并空间，可以类似地甚至几乎是逐字逐句地定义和叙述并空间内的概念和定理．例如：若一切 x_n 和 x 都属于某一个 $X^{(\alpha)}$，而且在此 $X^{(\alpha)}$ 内 $x_n \longrightarrow x$，则称在 X 内 $x_n \longrightarrow x$ 等等．详见参考文献 35 和 42.

第二章　基本空间与广义函数

广义函数理论本质上是基本空间上的泛函分析，广义函数的基本运算、性质和有关的概念都是从基本空间所具有的解析性质引导出来的. 在本章内，我们首先给出基本空间概念，研究两类基本空间 $K\{M_p\}$和 $Z\{M_p\}$的初等性质. 在§5内正式定义广义函数概念，讨论它与古典的局部可积函数及测度的关系. 在§6内讨论广义函数的基本运算. 在§7与§8讨论 δ 型序列和发散积分的有限部分. 最后，在§9以研究 $K\{M_p\}$ 广义函数的结构来结束本章.

§1　引　　言

1. 引言

函数是数学分析中的一个基本概念. 按照古典的函数定义，所谓实变数的实函数是指实数集到实数集之间的映射. 这样定义的函数在某种程度上的确反映了现实世界中两个变量之间的关系. 可以说，在19世纪和20世纪初叶，数学分析的整个进一步发展，实质上是遵循着这个定义可能展开的方向前进的. 一方面，客观实际的需要促使数学本身的发展，使得人们有必要把函数概念加以扩充. 人们开始研究所谓集函数（例如勒贝格测度可以视为可测集的函数，它的变元是可测集，函数值是该集的测度.）和泛函（即函数的函数）. 这样的概念提供了近代实函数论、积分论和泛函

分析理论的基础、另一方面，自然科学，特别是近代物理学的发展表明，古典的函数概念是不够用或不完全适用的．例如温度是一个宏观的概念，要说某一点的温度实际上是无意义的，有意义的是某一区域中的平均温度；在量子力学中广泛地应用着 δ 函数的概念，它在全直线上除去一点外处处为 0，在这一点处函数值为无限大，而在整个直线上的积分值却是 1．这在古典的函数概念中表现出不可克服的矛盾．试想一个仅在一点不为 0 的函数，是几乎处处为 0 的，它的积分值应当是 0，怎么可能为 1 呢？矛盾的产生只能说明古典的函数概念还不能完全适应客观规律，δ 函数不是古典意义下的函数，必须推广函数概念，使得新的函数概念包括 δ 函数和一系列新的研究对象．

在古典数学分析中，许多分析运算要受到较大的限制．数学分析的进一步发展，虽然使一些微积分运算和极限运算的限制得以放宽（例如黎曼（Riemann）可积放宽为勒贝格可积），但是那些必要的严格，甚至是繁琐的条件的考虑①，大大限制了数学分析方法的灵活运用，这也说明需要冲破古典分析数学中函数概念的框架．

本世纪 40 年代左右建立起来的广义函数论就是为了解决上述问题的一种尝试．1950年到 1951 年，施瓦兹（Schwartz）的两卷专著《分布论》出版，标志着广义函数论从积累材料阶段过渡到以整理材料为主的理论综合阶段．以后，盖尔凡特（Гельфанд）学派又推广了施瓦兹的结果，首先使用广义函数一词，重新系统地讨论了广义函数理论以及与它有关的分析上的问题，把分析、泛函分

---

① 例如连续函数不一定能求导；一阶可导函数不一定有高阶导函数；对于函数列求导函数的运算与极限运算不一定能交换，就是说，当 $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ 存在而且 $f'_m(x)$ 存在时，极限函数的导函数 $(\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x))'$ 与导函数列的极限 $\lim\limits_{m\to\infty} f'_m(x)$ 不一定都存在，即使它们都存在时也不一定相等．又如常数函数 1 的傅里叶变换是发散的广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}dt$，一般情况下它无意义，于是，如傅里叶变换等一些有力的分析工具在应用时要受到较大的限制．

析、微分方程论、广义随机过程、局部紧李群的表示论以及各种空间上的调和分析等一系列问题与广义函数联系起来，充分利用了当时的已有成果．保哥留波夫（Боголюбов）及其合作者把广义函数论成功地应用于量子力学，使它成为研究微观世界（基本粒子理论，量子场论）的必不可少的工具．现在广义函数论已成为有众多分支的一门学科，有着光明的发展前景，可以期待它将为现代数学、现代物理学和工程技术更好地服务．

2. 基本空间 $\mathscr{D}$ 与分布

我们从量子力学中常用的 δ 函数开始．设想在一根无限长细棒上有一质量分布，仅集中在 $x=0$ 处，总质量为一个单位．这意思是说，有一个假想的密度函数 $\delta(x)$，当 $x\neq 0$ 时，$\delta(x)=0$，在 $x=0$ 处，密度是无限大，而密度函数的积分值为总质量 1，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

这种假想的密度函数已超出了通常函数概念的范围，但它却在现实世界有原型，而且在工程技术中也常遇到．例如无线电工程中考察脉冲，在极短的瞬间爆发出一个单位能量的信号，这就和上述质量分布的情形相似．

从 $\delta(x)$ 的性质，我们还可以形式地认为，对于一切连续函数 $\varphi(x)$，应该有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(0). \qquad (1.1)$$

当 $\varphi(x)\equiv 1$ 时，这个式子成为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=1$.

(1.1)式可以由下式看出：

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi(x)-\varphi(0))\delta(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\varphi(x)-\varphi(0))\delta(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \max_{|x|\leqslant\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x$$

$$=\max_{|x|\leqslant\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\longrightarrow 0\quad(\varepsilon\longrightarrow 0^{+}).$$

其中$\varepsilon>0$. 请注意,因为$\delta(x)$是假想函数,所以积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x$的意义暂时还不清楚. 上面的推论只是形式上的说明和假想的推论,不能算作严格定义. 我们下面的任务是给广义函数(包括这种δ函数)以严格的数学定义,它的基本思想是:由积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0),$$

可以认为$\delta(x)$是连续函数空间上的连续线性泛函. 这启发我们,如果把连续函数空间进一步缩小,其中的收敛性进一步加强,那么在这个空间上的连续线性泛函一定更多. 为此我们给出下列定义:

定义 1.1 设$\mathscr{D}$表示一维欧几里德(Euclid)空间$\mathbf{R}^1$上无限次可微而且在某个有限区间外为0的函数全体,按照通常的加法和数乘使它成为一个线性空间. 在其中定义极限概念如下:设$\varphi\in\mathscr{D}$, $\varphi_n\in\mathscr{D}$, $n=1,2,\cdots$. 若

(1) 存在一个与n无关的公共有限区间$[a,b]$,使得一切φ_n在$[a,b]$外为0;

(2) 在$\mathbf{R}^1$上,对于每一个非负整数q,序列$\{\varphi_n^{(q)}\}$一致收敛于$\varphi^{(q)}$. 当$q=0$时,认为$\varphi_n^{(q)}(x)$与$\varphi^{(q)}(x)$是连续函数;

则称序列$\{\varphi_n\}$在$\mathscr{D}$中收敛于φ,记为$\varphi_n\longrightarrow\varphi(\mathscr{D})$,称$\mathscr{D}$为**基本空间**,它的元素称为**基本函数**.(参看第一章例 1.6)

注: 空间$\mathscr{D}$的这种收敛性概念不能用度量空间的极限来表述. 即,不能定义一个距离ρ,使得$\varphi_n\longrightarrow\varphi(\mathscr{D})$等价于$\rho(\varphi_n,\varphi)\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$.

容易看出,在$\mathscr{D}$中若$\varphi_n\longrightarrow\varphi(\mathscr{D})$, $\psi_n\longrightarrow\psi(\mathscr{D})$而且$a_n\longrightarrow a$,

$b_n \longrightarrow b$，则

$$a_n\varphi_n + b_n\psi_n \longrightarrow a\varphi + b\psi(\mathscr{D}),$$

即$\mathscr{D}$中的线性运算连续.

定义 1.2 设 f 是$\mathscr{D}$上的连续线性泛函，依据施瓦兹，称 f 为**分布**.

注：分布是广义函数的一种.

例 1.1 对于任何固定的正数 a，作函数

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2-|x|^2)}, & |x|<a \\ 0, & |x|\geqslant a \end{cases} \tag{1.2}$$

显然 $\varphi(x,a)\in\mathscr{D}$. 这个函数也称为球形函数，由它出发可作出一系列基本函数.

例 1.2 设$\{b_m\}\subset \mathrm{R}$，$b_m\longrightarrow 0$，那么

$$\varphi(x-b_m,a)\longrightarrow\varphi(x,a)(\mathscr{D}).$$

但是如果 $b_m\longrightarrow\infty$，令 $\varphi_m(x)=\frac{1}{m}\varphi(x-b_m,a)$，这时尽管对于一切非负整数 p，$\{D^p\varphi_m\}$在 R^1 上一致收敛于0，但是它不满足$\mathscr{D}$中函数列收敛定义中的条件(1)，因为这时使 φ_m 不等于 0 的集是以 b_m 为中心、a 为半径的邻域. 由于 $b_m\longrightarrow\infty$，故这些邻域当然不能容纳在一个公共的有限区间中，所以序列$\{\varphi_m\}$在$\mathscr{D}$中不收敛于任何函数.

定义 1.3 设$f(x)$在任一有限区间上均为勒贝格可积的，则称$f(x)$为**局部可积函数**.

例 1.3 设 $f(x)$是局部可积函数，我们在$\mathscr{D}$上定义泛函

$$T(f):\ \varphi\mapsto(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \quad (\varphi\in\mathscr{D})$$

由于 $f(x)$局部可积，而且 $\varphi(x)$在某一个有限区间外为 0，所以上述积分有意义. $T(f)$显然是线性泛函. 由于当 $\varphi_m\longrightarrow\varphi(\mathscr{D})$ 时，一切 φ_m 必含在某一个与 m 无关的公共有限区间内，而且在其中

一致收敛于 φ，所以 $(f,\varphi_m)\longrightarrow(f,\varphi)$，因此 $T(f)$ 又是连续的；故对于每一个局部可积函数 f，对应于 f 的泛函是一个连续线性泛函. 还可以证明这种对应是一对一的，即如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

对一切 $\varphi\in\mathscr{D}$ 成立，则 $f(x)=0$，p.p.（见后面定理 5.4）. 这样，局部可积函数就可以一对一地嵌入 $\mathscr{D}$ 的连续线性泛函空间，作为它的一部分，我们称它为**函数型分布**或**正则分布**，否则称为**非正则分布**或**奇异分布**.

例 1.4 现在我们可以给本节开始时引进的 $\delta(x)$ 一个严格的数学定义. 若 $\mathscr{D}$ 上的连续线性泛函由下式给定：对一切 $\varphi\in\mathscr{D}$，对应数值 $\varphi(0)$，则称这一泛函为 **δ 函数**. 换句话说，对于一切 $\varphi\in\mathscr{D}$，有 $(\delta,\varphi)=\varphi(0)$. 这一定义正是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$$

的严格化.

δ 为 $\mathscr{D}$ 上的连续线性泛函是不难验证的. 事实上，因为

$$\begin{aligned}\delta(\alpha\varphi+\beta\psi)&=(\alpha\varphi+\beta\psi)(0)=\alpha\varphi(0)+\beta\psi(0)\\&=\alpha(\delta,\varphi)+\beta(\delta,\psi),\end{aligned}$$

所以 δ 为线性的. 又当 $\varphi_n\longrightarrow\varphi(\mathscr{D})$ 时，意味着在任何有限区间上各阶导函数一致收敛，当然更有 $\varphi_n(0)\longrightarrow\varphi(0)$，即 $(\delta,\varphi_n)\longrightarrow(\delta,\varphi)$.

从例 1.3 和 1.4 知，我们确实得到了一个新的研究对象——分布. 它包含通常的局部可积函数，又包含超出通常函数概念的非正则分布 δ 在内（见定义 5.6 的注）. 它还包括一系列其它的非正则分布，所以是一种广义函数. 对于它的基本性质和运算，我们将在以后各节用更一般的方式来讨论.

§2 基本空间的概念

从上一节分布的引入可知，要推广函数概念，必须首先构造基本空间，然后才能定义其上的连续线性泛函. 因此，我们先构造基本空间.

1. 基本空间的定义

在集 E 上定义的函数 $\varphi(x)$ 所组成的局部凸空间或其并 Φ 称为基本空间. 为了以后更好地研究广义函数，我们还必须作一些更具体的规定.

定义 2.1 在 n 维实（或复）空间 R^n（或 C^n）上定义的实（或复）值函数集 Φ，若满足下列条件：

(1) Φ 是完备的赋可列范空间或它们的可列并空间；

(2) 若在 Φ 内的函数列 $\varphi_m \longrightarrow 0$，则对任意点 $x_0 \in \mathrm{R}^n$（或 C^n），总有 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)=0$；

则称 Φ 为**基本空间**或**试验空间**，Φ 的元素称为**基本函数**或**试验函数**.

注：因为基本空间 Φ 是线性空间，所以在它里面定义极限序列 $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ 时，只要定义零序列，即 $\varphi_m \longrightarrow 0$ 即可.

这里零元素是恒等于 0 的函数. 序列 $\{\varphi_m\}$ 在基本空间 Φ 内收敛于极限 φ，我们记为

$$\varphi_m \longrightarrow \varphi(\Phi) \quad 或 \quad \lim_{m\to\infty}\varphi_m = \varphi(\Phi).$$

2. $K\{M_p\}$ 空间类

下面我们给出两类基本空间，第一类在 R^n 上定义，第二类在 C^n 上定义.

先考虑函数序列：

$$1 \leqslant M_1(x) \leqslant M_2(x) \leqslant \cdots \leqslant M_p(x) \leqslant \cdots. \tag{2.1}$$

这里 $M_p(x)$ 在 R^n 上定义，而且 $M_p(x) \leqslant \infty$. 我们假定在 R^n 的每

一点或者一切 $M_p(x)$ 都是有限的或者全都为∞．记 R_M 为 $M_p(x)$ 都等于∞的点集，R_M^n 为 R_M 在 $\mathbf{R}^n$ 内的余集．我们假定在 R_M^n 上的一切 M_p 都是连续的．为了避免纠缠于边界细节，我们假定 R_M^n 的边界的勒贝格测度为 0．

设在 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 上定义的复值函数 φ 满足下列条件：

(1) 对于任意 $0\leqslant|\alpha|\leqslant p, 1\leqslant p<\infty$，有 $D^\alpha\varphi(x)=0\ (x\in R_M)$，这里 $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，假定 $0\cdot\infty=0$；

(2) $M_p(x)D^\alpha\varphi$ 是 R_M^n 上的连续有界函数．

将一切上述函数的全体表示为 $K\{M_p\}$，它显然是线性空间．它的拓扑由范数序列

$$\|\varphi\|_p=\sup_{|\alpha|\leqslant p}\sup_{x\in R_M^n}M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|\quad(1\leqslant p<\infty)\tag{2.2}$$

确定．

注意，若 R_M^n 为闭集，则条件(1)表示 φ 的**支集**① 位于 R_M^n 内．

这种空间的一个例子是 $D(\Omega)$ 或 D_Ω（Ω 是紧集）．这时取

$$M_p(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega\\ \infty, & x\notin\Omega\end{cases}\tag{2.3}$$

今后我们也用符号 $K(\Omega)$ 表示 $D(\Omega)$．当 Ω 是区间 $|x_j|\leqslant a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 时简记为 $K(a)$．

另一个重要例子是空间 S，S 的元素是 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 急减函数 φ．所谓**急减函数**，就是对任意的 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 和自然数 p，存在正整数 C_{mp}，满足下列条件

$$|D^m\varphi(x)|\leqslant C_{mp}/(1+|x|^2)^p\tag{2.4}$$

的 C^∞ 函数．S 显然是线性空间．若由(2.2)式定义它的拓扑，则 S 是赋可列范空间，这里

$$M_p(x)=(1+|x|^2)^p.\tag{2.5}$$

于是，若序列 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbf{N}}\subset S$，各阶导函数 $D^m\varphi_j(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的每个紧子集上分别一致收敛于 0，而且对于任意的 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 及自

① 即集 $\{x|\varphi(x)\neq0\}$ 的闭包，记为 $\mathrm{supp}\varphi$ 或 $\mathrm{car}\varphi$。

然数 p，必存在一个与 j 无关的常数 C_{mp}，使得

$$|D^m\varphi_j(x)|\leqslant C_{mp}/(1+|x|^2)^p,$$

则 $\varphi_j \longrightarrow 0(S)$.

在 § 3 内将证明 $K\{M_p(x)\}$ 空间是完备赋可列范空间，从而是基本空间，而且在 M_p 满足某种条件下，它们是完全空间. 特别，$K(\Omega)$ 与 S 都是完全空间.

由定义，急减函数 φ 的意义就是当 $|x|\longrightarrow\infty$ 时，φ 的各阶导函数都比 $1/|x|$ 的任意正数幂更快地趋于 0，也可写为

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^p|D^m\varphi(x)|=0.$$

第三个基本空间是由在空间 R^n 上一切无限可微的复值函数组成的线性空间. 它的一个零点邻域基由下列零点邻域组给定：

$$V(m,\varepsilon,\Omega)\triangleq\{\varphi\mid|D^p\varphi(x)|<\varepsilon,x\in\Omega,|p|\leqslant m\}.$$

这里的 m 为任意非负整数组，ε 是任意正数，而 Ω 是 R^n 内的任意紧子集，则它成为局部凸空间，记为 E. 如令

$$\|\varphi\|_m=\sup_{|p|\leqslant m}|D^p\varphi(x)|,\ m=1,2,\cdots,$$

则 E 为完备赋可列范空间，这时 $M_p(x)\equiv1$（它也是完全空间），于是 E 为基本空间，而且 $K\subset S\subset E$.

可以证明，$\varphi_j\longrightarrow0(E)$ 的充要条件是：对于每一个 p，序列 $\{D^p\varphi_j\}$ 在 R^n 的每个有界集上一致收敛于0.

显然，若 $\varphi_j\longrightarrow0(S)$，则 $\varphi_j\longrightarrow0(E)$；反之不成立. 例如取

$$\varphi_j(x)=\exp\{-|x+x_j|^2\}.$$

这里 $|x_j|\to\infty$ 时 $\varphi_j\to0(E)$，但 $\varphi_j\not\to0(S)$. 由此可见，空间 S 的拓扑强于空间 E 在 S 上诱导出的拓扑. 其它重要例子参看后面参考文献36.

3. $Z\{M_p\}$ 空间类

第二类基本空间由序列 $\{M_p(z)\}$ 定义，这里 $z=x+iy$ 跑遍复 n 维欧氏空间 C^n，而 $M_p(z)$ 对于一切 z 是实值连续函数，而且对于某一个实值连续函数 $C(y)$ 有

$$0<C(y)\leqslant M_1(z)\leqslant M_2(z)\leqslant\cdots\leqslant M_p(z)\leqslant\cdots. \tag{2.6}$$

考虑在 $\mathbb{C}^n$ 上定义而且使范数列

$$\|\varphi\|_p\triangleq\sup_{z\in\mathbb{C}^n}M_p(z)|\varphi(z)| \quad (1\leqslant p<\infty) \tag{2.7}$$

都是有限的一切整函数 $\varphi(z)$ 的全体，由此范数列确定拓扑的上述函数空间记为 $Z\{M_p\}$. 若取

$$M_p(z)=e^{-a|y|}(1+|z|)^p=e^{-a|y|}\prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|)^p, \tag{2.8}$$

这里 a 是正向量(即 $a_j>0, 1\leqslant j\leqslant n$)，则得到满足条件

$$(1+|z|)^k|\varphi(z)|\leqslant C_k e^{a|y|} \quad (0\leqslant k<\infty) \tag{2.9}$$

的指数型整函数空间①，记为 $Z(a)$，这里 C_k 是依赖于 φ 的常数. 在 § 4 内将证明空间 $Z\{M_p\}$ 是完备赋可列范空间，而且在 M_p 满足某种条件时它是完全空间. 特别，$Z(a)$ 是完全空间.

在广义函数论里要用到各种不同类型的基本空间，在讨论特定问题时应选择适合问题的特性的基本空间，有时还要对基本空间的定义作适当修改.

下面定理对于任意基本空间都成立.

定理 2.1 若基本空间 Φ 是包含空间 $K(\Omega)$ 的完备赋可列范空间，则当序列 $\{\varphi_m\}$ 在 $K(\Omega)$ 的拓扑下收敛于零时，它也在 Φ 的拓扑下收敛于 0.

证：若 $\varphi_m\longrightarrow 0(K(\Omega))$，而且 $\varphi_m\longrightarrow\varphi^*(\Phi)$，则由定义2.1，对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 时，$\varphi^*(x)=0$，因此，作为 Φ 的元素有 $\varphi^*=0$，于是 $K(\Omega)$ 和 Φ 的拓扑是和谐的. 由第一章的定理 4.7，当 $\varphi_m\longrightarrow 0(K(\Omega))$ 时有 $\varphi_m\longrightarrow 0(\Phi)$. □

系 若 Φ 是完备赋可列范空间 $\Phi^{(m)}$ 的可列并空间，而且对于某一个 m，有 $K(\Omega)\subset\Phi$，则定理 2.1 成立.

---

① 设 $f(z)$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数，若存在正常数 A 及 B，使 $|f(z)|\leqslant Be^{A|z|}$，则称 $f(z)$ 具指数型.

§3 空间$K\{M_p\}$的完备性与完全性

1. 完备性

首先，对于固定的自然数 p，考虑满足下列条件的 $C^p(\mathrm{R}^n)$ 函数 φ(即具有直到 p 阶连续导函数的函数)的全体：

(1) $\varphi(x)$及其前 p 阶导函数在 R_M 上为 0；

(2) 连续函数 $M_p(x)D^\alpha\varphi(x)$ 对一切 $|\alpha|\leqslant p$ 在 R_M^n 上有界；

则它构成线性空间. 在其中引进范数

$$\|\varphi\|_p \triangleq \sup_{|\alpha|\leqslant p}\ \sup_{x\in R_M^n} M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|, \tag{3.1}$$

则它构成赋范线性空间，记为 Φ_p. 我们有：

引理 1 Φ_p 是完备空间.

证： 设$\{\varphi_m\}$是 Φ_p 内的柯西序列，则对于任意$|\alpha|\leqslant p, k\geqslant m$ 与 $x\in R_M^n$，有

$$\begin{aligned}|D^\alpha\varphi_m(x)-D^\alpha\varphi_k(x)| &\leqslant M_p(x)|D^\alpha\varphi_m(x)-D^\alpha\varphi_k(x)| \\ &\leqslant \|\varphi_m-\varphi_k\|_p<\varepsilon_m,\end{aligned} \tag{3.2}$$

这里 $m\longrightarrow\infty$时，$\varepsilon_m\longrightarrow 0$. 因为(3.2)式的左边对于一切 $x\in R_M$ 都是 0，于是在 R^n 上有 $D^\alpha\varphi_m\longrightarrow D^\alpha\varphi_0$ 一致成立. 特别，由此得 $\varphi_0\in C^p(\mathrm{R}^n)$及在$R_M$ 上对于一切$|\alpha|\leqslant p$ 时，$D^\alpha\varphi_0(x)=0$. 在(3.2)式内令 $k\longrightarrow\infty$，进一步得

$$M_p(x)|D^\alpha\varphi_m(x)-D^\alpha\varphi_0(x)|\leqslant\varepsilon_m \quad (\forall\, x\in R_M^n). \tag{3.3}$$

因此

$$M_p(x)|D^\alpha\varphi_0(x)|\leqslant\varepsilon_m+\|\varphi_m\|_p. \tag{3.4}$$

由此可知$\|\varphi_0\|_p$存在，即 $\varphi_0\in\Phi_p$. 不等式(3.3)证明了

$$\|\varphi_m-\varphi_0\|_p\leqslant\varepsilon_m\longrightarrow 0,$$

即$\varphi_m\to\varphi_0(\Phi_p)$，所以 Φ_p是完备空间. □

若上述柯西序列的元素 $\varphi_m \in \Phi = K\{M_p\}$，则极限当然也在 $\bar{\Phi}_p$ 内，因为 Φ 关于范数 $\|\cdot\|_p$ 的完备化由 Φ 内一切柯西序列的极限得到. 记这个完备化为 Φ_p，它是 $\bar{\Phi}_p$ 的线性子空间. 因为 $\Phi = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bar{\Phi}_p$，而且 $\Phi \subset \Phi_p \subset \bar{\Phi}_p$，所以我们得到

$$\Phi = K\{M_p\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p. \tag{3.5}$$

对于任意 $\varphi \in \Phi$，我们有

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_2 \leqslant \cdots \leqslant \|\varphi\|_p \leqslant \cdots. \tag{3.6}$$

引理 2 对于任意自然数 $p \geqslant 1, q \geqslant 1$，范数对 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_q$ 是和谐的.

证： 只须证明，若 $\{\varphi_m\} \subset \Phi$，$\|\varphi_m\|_q \longrightarrow 0$，而且对于任意 $k \geqslant m$，$m \longrightarrow \infty$ 时，$\|\varphi_m - \varphi_k\|_p \leqslant \varepsilon_m$，当 $\varepsilon_m \longrightarrow 0$ 时 $\|\varphi_m\|_p \longrightarrow 0$. 由于 $M_q(x) \geqslant 1$，则当 $\|\varphi_m\|_q \longrightarrow 0$ 时推出，对于任意 $x \in \mathrm{R}^n$，都有 $\varphi_m(x) \longrightarrow 0$. 另一方面，若 $\|\varphi_m - \varphi_0\|_p \longrightarrow 0 (m \longrightarrow \infty)$，则对于任意 $x \in \mathrm{R}^n$，有 $\varphi_m(x) \longrightarrow \varphi_0(x)$. 由极限的唯一性知 $\varphi_0(x) \equiv 0$，用(3.3)式得

$$M_p(x)|D^\alpha \varphi_m(x)| < \varepsilon_m. \quad \square$$

由第一章定理 3.1，我们证明了下列定理：

定理 3.1 $K\{M_p\}$ 是完备赋可列范空间.

2. 完全性

我们将证明当下列条件(P)被满足时，$K\{M_p\}$ 是完全空间.

定义 3.1 若对于任意自然数 p，存在自然数 $p' > p$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，必有某一个 $N_0 > 0$，当 $|x| > N_0$ $(x \in R^n_M)$ 或 $M_p(x) > N_0 (x \in R^n_M)$ 时，推出 $M_p(x) < \varepsilon M_{p'}(x)$，则称函数列 $\{M_p(x)\}$ 满足条件(P).

若对于一切 x，$M_p(x)$ 是有限值函数(即 $R_M = \varnothing$)，则条件(P)等价于下列命题：

对于任意整数 $p\geqslant 1$，对应一个整数 $p'>p$，使得

$$\lim_{|x|\to\infty} M_p(x)/M_{p'}(x)=0. \tag{3.7}$$

注意，若条件(P)成立，则对于任意$|\alpha|\leqslant p$，$\varphi\in K\{M_p\}$时有

$$M_p(x)D^\alpha\varphi(x)\longrightarrow 0\ \ (\text{当}|x|\longrightarrow\infty\text{或}\ M_p(x)\longrightarrow\infty). \tag{3.8}$$

事实上，若上式不成立，则对于某一个 p 和某一个 α，必存在序列 $\{x_m\}$，当$|x_m|\longrightarrow\infty$或者 $M_p(x_m)\longrightarrow\infty$时，有常数 $C>0$，使得

$$M_p(x_m)|D^\alpha\varphi(x_m)|\geqslant C>0.$$

但是另一方面，当 $m\longrightarrow\infty$时，

$$M_{p'}(x_m)|D^\alpha\varphi(x_m)|\longrightarrow\infty,$$

同$\|\varphi\|_{p'}<\infty$矛盾.

定义 3.2 若序列$\{\varphi_m\}$及其各阶导函数序列$\{D^\alpha\varphi_m\}$在 R^n 的每一个有界集上一致收敛，则称序列$\{\varphi_m\}$为**固有收敛**.

引理 3 设

(1) 函数列$\{M_p(x)\}$满足条件(P)；

(2) 函数序列$\{\varphi_m\}\subset K\{M_p\}$；

(3) 函数序列$\{\varphi_m\}$固有收敛于 0；

(4) 对于任意整数 $p\geqslant 1$，$\|\varphi_m\|_p\leqslant C_p$(即$\{\varphi_m\}$是 $K\{M_p\}$ 内的有界收敛序列)；

则对于任意整数 $p\geqslant 1$，$\|\varphi_m\|_p\longrightarrow 0$，即$\varphi_m\longrightarrow 0(K\{M_p\})$.

证： 给定自然数 p，如在条件 (P) 内选择 p'，使得对于任意 $\varepsilon>0$，当$|x|>N$，或 $M_p(x)>N(x\in R^n_M)$时有

$$M_p(x)<(\varepsilon/C_{p'})M_{p'}(x),$$

则对于任意$|\alpha|\leqslant p$，有

$$M_p(x)|D^\alpha\varphi_m(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{C_{p'}}M_{p'}(x)|D^\alpha\varphi_m(x)|$$

$$\leqslant(\varepsilon/C_{p'})\|\varphi_m\|_{p'}\leqslant\varepsilon. \tag{3.9}$$

因为在 R^n_M 内，(3.9) 式可能不满足的点集 Γ 包含在$|x|\leqslant N$ 和 $M_p(x)<N$ 内，我们能取 m_0 充分大，使得 $m\geqslant m_0$ 时，对于一切 $x\in$

Γ，从而对于一切 $x \in R_M^n$ 有

$$M_p(x)|D^\alpha \varphi_m(x)| < \varepsilon$$

成立，于是当 $m \geqslant m_0$ 时有 $\|\varphi_m\|_p < \varepsilon$. □

系 若函数序列 $\{\varphi_m\} \subset K\{M_p\}$，$\|\varphi_m\|_p \leqslant C_p$ 对于一切自然数 p 成立，而且 $\{\varphi_m\}$ 固有收敛于 φ_0，则 $\varphi_0 \in K\{M_p\}$，而且 $\varphi_m \longrightarrow \varphi_0(K\{M_p\})$.

证： 对于任意整数 $m \geqslant 1$，当 $\varepsilon_m = 2C_p$ 时(3.2)式成立. 令 $k \longrightarrow \infty$，得(3.3)式，因此(3.4)式成立，从而对于任意自然数 p，$\|\varphi_0\|_p < \infty$，因此

$$\varphi_0 \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p = K\{M_p\}.$$

再应用引理 3 于序列 $\{\varphi_m - \varphi_0\}$ 即可. □

定理 3.2 若 $\{M_p\}$ 满足条件(P)，则 $K\{M_p\}$ 是完全空间.

证： 只须证明有界集是相对列紧的. 设 A 是有界集，即对于任意 $\varphi \in A$，$1 \leqslant p < \infty$，有 $\|\varphi\|_p \leqslant C_p$. 因为 $M_p(x) \geqslant 1$，对于每一个 α，函数组 $\{D^\alpha \varphi \mid \varphi \in A\}$ 一致有界. 用阿斯克里-阿尔采拉定理与标准的对角线程序，能选择固有收敛序列 $\{\varphi_m\} \subset A$. 事实上，任取序列 $\{\varphi_j\} \subset A$，则由于范数 $\|\varphi_j\|_1$ 有界，导函数序列 $\{D\varphi_j\}$ 一致有界，于是由阿斯科里-阿尔采拉定理，存在子序列 $\{\varphi_{1j}\}$ 在 $|x| \leqslant 1$ 上一致收敛. 又由于这个子序列在 $|x| \leqslant 2$ 上有界，导函数序列 $\{D\varphi_{1j}\}$ 和 $\{D^2\varphi_{1j}\}$ 一致有界，依同一定理，存在子序列 $\{\varphi_{2j}\} \subset \{\varphi_{1j}\}$ 在 $|x| \leqslant 2$ 上一致收敛于一阶导函数 $\{D\varphi_{2j}\}$，从函数序列 $\{\varphi_{2j}\}$ 在 $|x| \leqslant 1$ 上的一致收敛性和它们的导函数在 $|x| \leqslant 2$ 上的一致收敛性推出这些函数序列在 $|x| \leqslant 2$ 上的一致收敛性. 继续作下去，然后用对角线方法，即得有界子序列 $\{\varphi_{jj}\}$，它在每一个有界集内一致收敛于某一个极限 $\varphi_0(x)$. 应用引理 3 的系，即得序列 $\{\varphi_{jj}\}$ 依 $K\{M_p\}$ 的拓扑收敛于元素 φ_0. □

3. $K\{M_p\}$ 空间类的一些性质

显然，若 R_M^n 的内部是非空的，则任意 $K\{M_p\}$ 包含**有限函数**[1]．若 $M_p(x)$ 是 R^n 上的有限函数，则 $K\{M_p\}$ 包含 C_0^∞（C_0^∞ 即支集有界的无限次可微函数类）．下边证明：

定理 3.3 若函数列$\{M_p\}$满足条件(P)，则 $K\{M_p\}$ 的一切有限函数组成 $K\{M_p\}$的稠密线性子空间．

证： 令

$$\omega(x)=\begin{cases}\exp[1/(|x|^2-1)], & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

又令

$$h(x)=C\int_{-2}^{2}\omega(|x|-\rho)\,\mathrm{d}\rho,$$

其中$|x|=r$，则 $\omega(x)$ 从而 $h(x)$ 是 C^∞ 函数．可以选择常数 C，使得

$$h(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>3\end{cases}$$

对于任意 $\varphi\in K\{M_p\}$，定义

$$\varphi_m(x)=\varphi(x)h(x/m). \tag{3.10}$$

因为对于$|x|<m$，$\varphi_m(x)=\varphi(x)$，从而函数序列 $\{\varphi_m\}$ 固有收敛于 φ．若能证明

$$\|\varphi_m\|_p\leqslant C_p\quad(1\leqslant p<\infty), \tag{3.11}$$

则由引理 3 的系，$\varphi_m\longrightarrow\varphi(K\{M_p\})$，定理即可证明．

现在估计$\|\varphi_m\|_p$．当$|\alpha|\leqslant p$ 时，

$$M_p(x)|D^\alpha\varphi_m(x)|=M_p(x)\left|\sum_{k\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{k}D^k h(x/m)D^{\alpha-k}\varphi(x)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k\leqslant\alpha}H_p\binom{\alpha}{k}M_p(x)|D^{\alpha-k}\varphi(x)|\leqslant C_p' H_p\|\varphi\|_p,$$

其中$\binom{\alpha}{k}$为二项式展开系数，而

---

① 若 $\mathrm{supp}f\subset F$，而且集 F 有界，则称 f 为有限函数．

$$H_p=\max_{|k|\leqslant p}\max_x|D^k h(x)|.$$

令 $C_p=C'_p H_p\|\varphi\|_p$，就证明了(3.11)式. □

设给定两个函数序列 $\{M_p(x)\}$ 与 $\{M'_p(x)\}$，设它们满足下列条件：

$$0<C(p)\leqslant M_p(x)/M'_p(x)\leqslant C'(p).\quad (x\in R^n_M) \tag{3.12}$$

这里 $C(p)$ 和 $C'(p)$ 为依赖于 p 的常数. 在 $M_p(x)=M'_p(x)=\infty$ 处，也认为此不等式满足(这时不会出现 $M_p(x)$ 与 $M'_p(x)$ 中一个是无限，另一个是有限的情形). 下面证明，对应于依上面函数序列 $\{M_p(x)\}$ 与 $\{M'_p(x)\}$ 构造的赋可列范空间 $K\{M_p\}$ 与 $K\{M'_p\}$(依所含元素与拓扑)重合. 实际上，若对于某一个 $\varphi(x)$，表达式

$$\|\varphi\|_p=\sup_{|\alpha|\leqslant p}\sup_{x\in R^n_M}M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|$$

成立，则有

$$\|\varphi\|'_p\triangleq\sup_{|\alpha|\leqslant p}\sup_{x\in R^n_M}M'_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant(1/C(p))\|\varphi\|_p. \tag{3.13}$$

另一方面，有 $\|\varphi\|_p\leqslant C'(p)\|\varphi\|'_p$，于是两个范数序列等价. 由此知空间 $K\{M_p\}$ 与 $K\{M'_p\}$ 重合. 这时我们也说满足(3.12)式的两个函数序列 $\{M_p(x)\}$ 与 $\{M'_p(x)\}$ 为**等价函数序列**. □

例 3.1 令

$$M_p(x)=\sup_{|k|\leqslant p}|x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}|$$

和
$$M'_p(x)=(1+|x_1|)^p\cdots(1+|x_n|)^p.$$

显然 $M_p(x)\leqslant M'_p(x)$. 另一方面，由于

$$1+|x_i|<\begin{cases}2, & |x_i|\leqslant1\\ 2|x_i|, & |x_i|>1\end{cases}$$

于是 $M'_p(x)\leqslant 2^{np}M_p(x)\,(x\neq0)$. 因此，两个函数序列 $\{M_p(x)\}$ 与 $\{M'_p(x)\}$ 等价.

最后，由序列(2.3)式和(2.5)式可推出 $M_p(x)$ 满足条件(P). 因此，$K(\Omega)$ 与 S 都是完全空间，而且集 C_0^∞ 在 S 内稠密.

§4 空间$Z\{M_p\}$的完备性与完全性

1.完备性

令$\Psi=Z\{M_p\}$，记Ψ_p为固定p时，使$\|\Psi\|_p<\infty$的一切整函数的全体. 用证明上节引理1的方法容易证明Ψ_p是完备赋范空间. 事实上，对任意自然数p，令Ψ_p为使$M_p(z)|\psi(z)|$有界的整解析函数全体，则它显然是线性空间. Ψ_p也是赋范线性空间. 因为，显然有$\|\psi\|_p\geqslant 0$，而且$\|0\|_p=0$. 若$\|\psi\|_p=0$，则$\forall z\in \mathbf{C}^n$，有

$$0<C(y)|\psi(z)|\leqslant M_p(z)|\psi(z)|\leqslant\|\psi\|_p=0,$$

然而$C(y)>0$，所以$\psi(z)=0$.

由范数定义易知$\|\alpha\psi\|_p=|\alpha|\|\psi\|_p$.

又若$\psi_1,\psi_2\in\Psi_p$，$\forall z\in\mathbf{C}^n$，有

$$\begin{aligned}M_p(z)|\psi_1(z)+\psi_2(z)|&\leqslant M_p(z)|\psi_1(z)|+M_p(z)|\psi_2(z)|\\&\leqslant\|\psi_1\|_p+\|\psi_2\|_p.\end{aligned}$$

所以
$$\|\psi_1+\psi_2\|_p\leqslant\|\psi_1\|_p+\|\psi_2\|_p.$$

下面我们就来证明Ψ_p关于范数$\|\psi\|_p$是完备的. 任取Ψ_p内的柯西序列$\{\psi_m\}$. 令

$$F_k=\{z|\ |z|\leqslant k\},\quad k=1,2,\cdots$$

则由于$M_p(z)\geqslant C(y)>0$和$M_p(z)$的连续性知$M_p(z)$在F_k上取正的最小值，记为b_k. 于是对于每一个$k\in\mathbf{N}$和$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得$m,m'>N$时，对于一切$z\in F_k$，一致地有：

$$\begin{aligned}b_k|\psi_m(z)-\psi_{m'}(z)|&\leqslant M_p(z)|\psi_m(z)-\psi_{m'}(z)|\\&\leqslant\|\psi_m(z)-\psi_{m'}(z)\|_p<\varepsilon.\end{aligned}$$

于是当$z\in F_k$时，序列$\{\psi_m(z)\}$一致收敛. 设它收敛于解析函数$\psi_k(z)$，记它在$\mathbf{C}^n$上的解析延拓为$\psi(z)$. 由解析延拓的唯一性知$\psi(z)$为整解析函数. 又因为函数序列$\{\psi_m(z)\}$为柯西序列，对于一切$z\in\mathbf{C}^n$和$\varepsilon>0$，存在N，使$M>N$时有

$$M_p(z)|\psi_m(z)-\psi_N(z)|<\varepsilon.$$

令 $m\longrightarrow\infty$，即得

$$M_p(z)|\psi(z)-\psi_N(z)|\leqslant\varepsilon \quad (\forall z\in\mathbf{C}^n).$$

所以 $$M_p(z)|\psi(z)|\leqslant M_p(z)|\psi_N(z)|+\varepsilon \quad (\forall z\in\mathbf{C}^n),$$

从而 $\|\psi\|_p\leqslant\|\psi_N\|_p+\varepsilon<\infty$，于是 $\psi\in\overline{\Psi}_p$.

最后，因为对于一切 $z\in\mathbf{C}^n$ 和一切 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 m，$m'>N$ 时，

$$M_p(z)|\psi_m(z)-\psi_{m'}(z)|<\varepsilon,$$

令 $m'\longrightarrow\infty$ 即得

$$M_p(z)|\psi_m(z)-\psi(z)|\leqslant\varepsilon \quad (\forall z\in\mathbf{C}^n).$$

所以序列$\{\psi_m(z)\}$在$\overline{\Psi}_p$内收敛于$\psi(z)$，从而$\overline{\Psi}_p$是巴拿赫空间.

为了证明空间 $Z\{M_p\}$的完备性，首先仿§3的引理2，可证明$Z\{M_p\}$依范数列(2.7)为赋可列范空间. 再令 Ψ_p为空间 $Z\{M_p\}$关于范数$\|\cdot\|_p$的完备化，则Ψ_p为$\overline{\Psi}_p$的线性子空间. 因为$\Psi=\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\overline{\Psi}_p$，而且$\Psi\subset\Psi_p\subset\overline{\Psi}_p$，于是

$$\Psi=Z\{M_p\}=\bigcap_{p=1}^{\infty}\Psi_p. \tag{4.1}$$

由第一章定理 3.1，即得 $Z\{M_p\}$的完备性，于是我们证明了下列定理：

定理 4.1 空间 $Z\{M_p\}$是完备赋可列范空间.

2. 完全性

为了证明空间 $Z\{M_p\}$ 的完全性，我们还需要一种类似于条件(P)的条件(P_0)：

对于任意自然数 p，存在自然数 $p'>p$，使得

$$\lim_{|z|\to\infty}M_p(z)/M'_p(z)=0. \tag{4.2}$$

现在证明类似于上节引理 3 的系的下列事实：

引理 若函数序列$\{\psi_m\}\subset Z\{M_p\}$，对于一切$p\geqslant 1$，有$\|\psi_m\|_p\leqslant C_p$，而且$\{\psi_m\}$固有收敛于$\psi_0$在$\mathrm{R}^n$内成立，则$\psi_0\in Z\{M_p\}$，而且$\psi_m\longrightarrow\psi_0(Z\{M_p\})$.

证：因为$M_p(z)\geqslant C(y)>0$，在包含原点的任意有界域$G\subset\mathrm{C}^n$内序列$\{\psi_m\}$是一致有界的，于是由于这个函数组是正规组（即从组的任意序列能取出在G的闭子集内一致收敛的子序列），一切收敛子序列的极限必然是同一解析函数，因为任何两个这样的极限都是在原点的某一个邻域内对$z=x$重合的解析函数，于是证明了$\psi_0(x)$能延拓为整函数$\psi_0(z)$，而且$\psi_m(z)\longrightarrow\psi_0(z)$在$\mathrm{C}^n$的有界子集上一致成立. ▯

注：从上述证明能看出：若引理中假设$\psi_n\longrightarrow\psi_0$在$\mathrm{R}^n$内逐点成立，换为$\psi_m(x)\longrightarrow\psi_0(x)$对于原点的某一邻域内逐点成立时引理仍正确.

用引理和正规组作工具，对于定理3.2的证明略加修改，即得下列定理：

定理4.2 若函数序列$\{M_p(z)\}$满足条件(P_0)，则$Z\{M_p\}$是完全空间.

条件(P_0)在空间$Z(a)$内显然成立. 实际上，取$M_p(z)$如(2.8)式，则为了满足条件(P_0)，取$p'=p+1$即可.

我们用两个注来结束这一节：

(1) 等价函数序列$\{M_p(z)\}$和$\{M'_p(z)\}$的概念能像对$K\{M_p\}$一样引进. 等价函数序列的范数序列也是等价的.

(2) 定理3.3对空间$Z\{M_p\}$不成立.

§5 广义函数的概念

在§1内我们引进了一种简单而重要的广义函数——分布，而在§2～§4内我们建立了一般的基本空间，从而为建立一般的

广义函数论奠定了基础. 从本节开始，我们将讨论这一课题.

1. Φ 广义函数空间

定义 5.1 设 Φ 是基本空间，f 是 Φ 上的连续线性泛函，则称 f 为 **Φ 广义函数**. 不混淆时，也称为广义函数.

显然，Φ 广义函数与基本空间有关.

如用(f,φ)表示广义函数 f 对于基本函数 $\varphi\in\Phi$ 的值，则它满足下列条件：

(1) 线性：设 $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi$，$a_1,a_2$ 为常数(实或复)，则有

$$(f,a_1\varphi_1+a_2\varphi_2)=a_1(f,\varphi_1)+a_2(f,\varphi_2). \tag{5.1}$$

(2) 连续性：设序列 $\varphi_j\to 0(\Phi)$，则数列$(f,\varphi_j)\to 0(j\to\infty)$.

注：今后我们如记广义函数 $f(x)$ 时，只表示 f 对依赖于 x 的基本函数的运算，而 f 本身不是 x 的函数，f 关于 $\varphi\in\Phi$ 的"值"记为下列形式之一：

$$(f,\varphi),f(\varphi),f\cdot\varphi \text{ 或} (f(x),\varphi(x)).$$

我们能自然地定义广义函数的加法与数乘运算如下：

定义 5.2 设 f_1,f_2 为 Φ 广义函数，a_1 与 a_2 为复(或实)常数，则定义 f_1 与 f_2 的线性组合为：

$$(a_1f_1+a_2f_2,\varphi)=a_1(f_1,\varphi)+a_2(f_2,\varphi). \tag{5.2}$$

容易验证，这样定义的泛函也是一个 Φ 广义函数. 于是，一切 Φ 广义函数组成一个线性空间，记为 Φ^*或 Φ'.

定义 5.3 对基本空间 Φ，一切 Φ 广义函数组成的线性空间为 Φ^*. 在 Φ^* 内定义弱拓扑后，称为 **Φ 广义函数空间**，于是可在 Φ^*内定义序列的收敛性如下：若对于每一个 $\varphi\in\Phi$，复数列$(f_j,\varphi)\to 0(j\longrightarrow\infty)$，则称 Φ 广义函数序列 $f_j\longrightarrow 0(\Phi^*)$.

因为空间 Φ^*是线性的，所以 $f_j\longrightarrow f(\Phi^*)$的定义自然是 $f_j-f\longrightarrow 0(\Phi^*)$，也可表示为 $\forall\varphi\in\Phi$，有$(f_j,\varphi)\longrightarrow(f,\varphi)$.

显然，空间 Φ^*内的线性运算对于此极限定义而言是连续的. 因此 Φ^*是一个拓扑线性空间，今后仍记为 Φ^*或 Φ'.

注：上面定义的广义函数空间的收敛性概念，其实就是弱收敛概念.

定理 5.1 设 A 和 B 是基本空间，A 是 B 的子空间，而且 $\varphi_j \longrightarrow 0(A)$ 蕴含 $\varphi_j \longrightarrow 0(B)$，则每一个 B 广义函数 f 看作 A 上的泛函时，也是 A 广义函数，即 $B^* \subset A^*$.

证：设 f 为 B 广义函数，即 B 上的连续线性泛函. 显然 f 也是子空间 A 上的线性泛函. 又因 $\varphi_j \to 0(A)$ 可推出 $\varphi_j \to 0(B)$，于是由 f 在 B 上的连续性推出它在 A 上的连续性，因此 f 可以看作 A 广义函数. □

2. 广义函数与函数的关系

现在讨论广义函数作为局部可积函数与测度的推广问题.

定义 5.4 设 $f(x)$ 是定义在 n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 上的复值可测函数. 如果对任意紧集 $N \subset \mathbf{R}^n$，积分 $\int_N |f(x)| \mathrm{d}x$ 都存在，则称 $f(x)$ 是**局部可积函数**.

注：这里的定义显然是定义 1.3 的推广.

定义 5.5 设 Φ 广义函数 f 由下列积分

$$(f, \varphi) \triangleq \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x \tag{5.3}$$

定义，其中 $f(x)$ 是局部可积函数，$\varphi(x) \in \Phi$，则称 f 为**函数型 Φ 广义函数**或**正则 Φ 广义函数**.

令 $\Phi = K$，$f(x)$ 为局部可积函数，于是对于任意的 $\varphi \in \Phi$，积分 (5.3) 存在，而且定义一个线性泛函. 又当 $\varphi_j \longrightarrow 0(\Phi)$ 时，$(f, \varphi_j) \longrightarrow 0$，因此它定义一个 K 广义函数，即分布. 这说明广义函数是局部可积函数的直接推广. 特别，在 $\mathbf{R}^n$ 上的每一个连续函数都可看作 K 广义函数（参看例 1.3）.

如取比 K 更广的基本空间 Φ，要函数 $f(x)$ 能定义一个函数型的 Φ 广义函数，必须对 $f(x)$ 当 $|x| \longrightarrow \infty$ 时的增长率有适当限制，使得对于任意的 $\varphi \in \Phi$，积分 (5.3) 收敛.

定理 5.2 设局部可积函数 $f(x)$ 为缓增函数，即存在常数 C 及 m，使得

$$|f(x)| \leqslant C(1+|x|^2)^m, \tag{5.4}$$

则(5.3)定义一个函数型的 S 广义函数.

证：当 $\varphi \in S$ 时，积分(5.3)显然存在，因此它也定义一个线性泛函. 只须证明 f 对 S 的连续性.

设 $\varphi_j \longrightarrow 0\,(S)$，则对于任意的 $q \geqslant 0$，在 R^n 内一致地有

$$(1+|x|^2)^{m+q}\varphi_j(x) \longrightarrow 0.$$

于是存在依赖于 q 的 $e_j > 0$，使得

$$|\varphi_j(x)| < e_j/(1+|x|^2)^{m+q}.$$

于是 $|(f,\varphi_j)| = \left|\int_{\mathrm{R}^n} f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x\right| < e_j C\int_{\mathrm{R}^n} \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^q}$.

显然，存在 q 使得最后一个积分收敛. 因此，当 $e_j \longrightarrow 0$ 时，$(f,\varphi_j) \longrightarrow 0\ (j \longrightarrow \infty)$. □

注：定理 5.2 给出的仅是确定函数型广义函数的一个充分条件，而非必要条件. 例如，设 $\Phi = K$ 或 S，则 Φ 的基本函数 φ_0 本身也可定义一个函数型 Φ 广义函数：

$$(\varphi_0, \varphi) = \int_{\mathrm{R}^n} \varphi_0(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 5.3 设 $\Phi = K\{M_p\}$，而且局部可积函数 $f(x)$ 具有下列性质：对于某一个自然数 p，比值 $r(x) \triangleq |f(x)|/M_p(x)$ 可积，则(5.3)式定义一个 Φ 广义函数.

证：因为 $\left|\int_{\mathrm{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|$

$$\leqslant \|\varphi\|_p \int_{\mathrm{R}^n} |f(x)| \frac{\mathrm{d}x}{M_p(x)} = \|\varphi\|_p \int_{\mathrm{R}^n} r(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以，对于任意 $\varphi \in K\{M_p\}$，积分绝对收敛. 其次，若 $\varphi_m(x) \longrightarrow 0\,(\Phi)$，则 $\|\varphi_m\|_p \longrightarrow 0$，因此，

$$|(f,\varphi_m)|\leqslant\|\varphi_m\|_p\int_{\mathbf{R}^n} r(x)\mathrm{d}x\longrightarrow 0.$$

从而(5.3)连续. □

定理5.4 设基本空间 Φ 包含空间 K，局部可积函数 $f(x)$ 定义一个零 Φ 广义函数，即

$$(f,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0\quad(\forall\varphi\in\Phi),\qquad(5.5)$$

则 $f(x)=0$，p. p..

证：只须证明对于任意点 $a\in\mathbf{R}^n$ 和任意常数 $k>0$，都有

$$\int_{|x-a|\leqslant k} f(x)\mathrm{d}x=0.\qquad(5.6)$$

不妨假定 $a=0$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $\varphi_\varepsilon\in K\subset\Phi$，使得

$$\begin{cases}0<\varphi_\varepsilon(x)\leqslant 1, & x\in\mathbf{R}^n\\ \varphi_\varepsilon(x)=1, & |x|\leqslant k\\ \varphi_\varepsilon(x)=0, & |x|>k+\varepsilon\end{cases}\qquad(5.7)$$

事实上，令

$$k_{\varepsilon/2}=\{x\mid |x|\leqslant k+\varepsilon/2, \},$$

$$k_{5\varepsilon/8}=\{x\mid |x|<k+5\varepsilon/8\},$$

于是闭集 $k_{\varepsilon/2}$ 和 $\mathbf{R}^n\setminus k_{5\varepsilon/8}$ 不相交. 令

$$f(x)=\frac{\rho(x,\mathbf{R}^n\setminus k_{5\varepsilon/8})}{\rho(x,k_{\varepsilon/2})+\rho(x,\mathbf{R}^n\setminus k_{5\varepsilon/8})},$$

$$p_{\varepsilon/4}(x)=\begin{cases}0, & |x|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\\ \frac{4^nC}{\varepsilon^n}\exp\left(-\frac{16\varepsilon^2}{\varepsilon^2-16|x|^2}\right), & |x|<\frac{\varepsilon}{4}\end{cases}$$

这里常数C 由下式确定：

$$\frac{1}{C}\triangleq\int_{|x|\leqslant 1}\exp\left\{\frac{-1}{1-|x|^2}\right\}\mathrm{d}x.$$

而 $\rho(x,A)$ 表示点 x 与集 A 的距离. 作积分

$$\varphi_\varepsilon(x)=\int_{R^n} f(y)p_{\varepsilon/4}(x-y)\mathrm{d}y,$$

则 $\varphi_\varepsilon(x)$ 即为所求.

由假设和(5.7)式可知

$$\begin{aligned}0&=\int_{R^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{|x|\leqslant k} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x+\int_{k\leqslant|x|\leqslant k+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{5.8}$$

又由(5.7)式知

$$\begin{aligned}&\left|\int_{k\leqslant|x|\leqslant k+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&<\int_{k\leqslant|x|\leqslant k+\varepsilon}|f(x)|\mathrm{d}x\longrightarrow 0\quad(\varepsilon\longrightarrow 0).\end{aligned}\tag{5.9}$$

但是,当 $|x|\leqslant k$ 时

$$f(x)\varphi_\varepsilon(x)=f(x),\tag{5.10}$$

因此,由(5.8),(5.9)和(5.10)式知

$$\int_{|x|\leqslant k} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

由于 $f(x)$ 局部可积,所以 $f(x)=0$, p.p.. □

系 设基本空间 Φ 包含基本空间 K,则产生函数型 Φ 广义函数 f 的局部可积函数 $f(x)$ 几乎处处被唯一确定,因此可视二者为同一函数.

证: 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 产生同一 Φ 广义函数,则

$$\int_{R^n}[f_1(x)-f_2(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$$

因此 $f_1(x)=f_2(x)$, p.p.. 所以我们可以把函数型广义函数与产生它的局部可积函数本身等同看待. □

由上所述可知,在广义函数论里,我们用两种不同的观点来

考虑函数：第一，用普通观点来考虑函数，例如基本函数等；第二，用泛函分析观点来考虑函数，两个几乎处处相等的函数视为相等．广义函数的概念就是在这个意义之下的函数概念的推广．

广义函数论的重要问题之一是：设给定一个（普通的）函数 $f(x)$，一般地说它不一定是局部可积的．那么，是否存在一个广义函数 f，使得在一切 $f(x)$ 的局部可积点上 f 与 $f(x)$ 相等？是否可以建立这样的对应：$f(x)\mapsto f$，使通常函数的加法、乘法和微分法与广义函数的相应运算（广义函数的乘法和微分法我们将在后面逐步定义）仍然保持成立？显然，对于这类问题，肯定的回答是极其重要的，因为这样可使具有不可积奇点的普通函数能够包括到广义函数这一范畴中来．目前，这些问题的解决还只是零星的，参看后面 § 6 和 § 8．

3. 广义函数与测度的关系

广义函数不仅是局部可积函数的推广，而且是测度的推广．这里所谓空间 $\mathbf{R}^n$ 内定义的测度 μ 是一个具有可数可加性的集函数，即对于 $\mathbf{R}^n$ 内的每一个有界波莱尔（Borel）集 A，有一个复数值 $\mu(A)$ 与之对应（称为集 A 的测度），而且满足下列条件：

设 $A=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$，这里 A_m 是互不相交的波莱尔集，则 $\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m)$ 绝对收敛而且等于 $\mu(A)$．

设 C_0^0 是在 $\mathbf{R}^n$ 上定义的在某一个紧集外等于 0 的连续函数全体，$\varphi\in C_0^0$，μ 是测度．显然，φ 是对于测度 μ 的可积函数，于是可以定义斯蒂尔吉斯（Stieltjes）积分

$$(\mu,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.11}$$

C_0^0 具有下列性质：

（1）设 $\varphi_1,\varphi_2\in C_0^0$，$\alpha_1,\alpha_2$ 是复常数，则

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\in C_0^0;$$

(2) 设序列$\{\varphi_j\}$有公共的紧支集，而且一致地有 $\varphi_j \longrightarrow 0$，则称函数列$\{\varphi_j\}$收敛于 0.

于是 C_0^0 是一个基本空间，记为D^0. 根据积分(5.11)，测度在基本空间 D^0 上决定一个连续线性泛函，即 D^0 广义函数.

反之，由黎斯定理，对于空间 D^0 上的任意连续线性泛函 L，必有唯一的测度 μ 与之对应，使得斯蒂尔吉斯积分

$$(\mu, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \mathrm{d}\mu = (L, \varphi).$$

换句话说，每一个 D^0 广义函数都可由测度产生.

根据拉东-尼柯丁定理知：测度 μ 为绝对连续的充要条件为：存在唯一的局部可积函数 $f(x)$（称为测度 μ 的密度），使得

$$\mu(A) = \int_A f(x) \mathrm{d}x,$$

即 $\mathrm{d}\mu = f(x)\mathrm{d}x$. 因此，设 φ 是连续函数，则

$$(\mu, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x) \mathrm{d}x = (f, \varphi).$$

由此可知局部可积函数与绝对连续测度等价，我们不妨把绝对连续测度与其相应的密度函数视为同一，从而可以认为测度是局部可积函数的推广. 这个推广是实质的，因为有非绝对连续的测度.

例 5.1 设 $a \in \mathbf{R}^n, A \subset \mathbf{R}^n$，记

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \overline{\in} A \end{cases}$$

则 δ_a 可以看作位于点 a 的质量为 1 个单位所产生的测度. 它决定 D^0 广义函数如下：

$$(\delta_a, \varphi) \triangleq \int_{\mathbf{R}^n} \varphi \mathrm{d}\delta_a = \varphi(a).$$

习惯上称它为 δ_a 函数. 若 $a = (0, \cdots, 0)$，则记 δ_a 为 δ，也称为

狄拉克(Dirac)测度，即

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0).$$

一般地，我们有下列定义：

定义 5.6 设 Φ 是任意基本空间，令

$$(\delta_a,\varphi)=\varphi(a),\quad a\in\mathbf{R}^n,\varphi\in\Phi,$$

则称 δ_a 为 **δ 函数**.

注：δ 函数是一个测度，它显然非绝对连续，因此，它不能由局部可积函数产生．这种广义函数也称为**非函数型广义函数**或**奇异广义函数**．它在广义函数论里占有重要地位，以后我们还会多次遇见它.

测度比函数在实质上推广了，而广义函数又是测度在实质上的推广，"偶极子"概念就是一例.

例 5.2 位于实直线 $\mathbf{R}$ 上点 $\varepsilon(\varepsilon>0)$ 处的质量为 $1/\varepsilon$ 和位于零点的质量为 $(-1/\varepsilon)$ 所组成的质量系统，当 $\varepsilon\to0^+$ 时的极限，称为位于零点的数值为 **1** 的偶极子．它是测度的极限，而本身却不是测度.

实际上，应用测度的泛函分析定义所得的上述质量系统记为 T_ε，则 T_ε 为下列泛函：

$$(T_\varepsilon,\varphi)=(\varphi(\varepsilon)-\varphi(0))/\varepsilon,\quad \varphi\in D^0.$$

若 φ 在原点为可微的，则令 $\varepsilon\to0^+$ 时便能定义偶极子为一个泛函：

$$(T,\varphi)\triangleq\lim_{\varepsilon\to0^+}(\varphi(\varepsilon)-\varphi(0))/\varepsilon=\varphi'(0).$$

因此，作为偶极子的泛函 $T(\varphi)$ 仅仅定义在由一切在零点可微的函数 φ 所组成的集合上．对 D^0 内的极限定义而言，线性泛函 T 是不连续的，即它不是测度．因此，要处理偶极子以及更高级的多极子，必须作下列工作：(1) 对基本空间 D^0 加以限制；(2) 在新的基本空间里要有较强的拓扑．我们自然考虑到基本空间 K，由于 $K\subset D^0$，而且 $\varphi_j\longrightarrow0(K)$ 时，一切 $D^\alpha\varphi(x)$ 都在某一个有界集上一

致收敛于 0．于是可以看出，若定义 K 广义函数

$$(T,\varphi)=\varphi'(0),\quad \varphi\in K$$

则线性泛函 T 是连续的．由此可见，广义函数概念也是测度的实质上的推广．

最后，我们用一个有用的简单定理来结束本节．

定理 5.5 设序列 $\{f_m\}_{m\in N}$ 是满足下列条件的在 R（复空间 C^n 或实空间 R^n）上定义的可测函数序列：

(1) 对于一切 $m\in N$，有 $|f_m(x)|\leqslant g(x)$，这里 $g(x)$ 是函数型 Φ 广义函数，且当 φ 取遍 Φ 的有界子集时，积分 $\int_R g(x)|\varphi(x)|dx$ 有界，其中积分域 R 为 C^n 或 R^n；

(2) $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)=f_0(x)$, p.p.；

则 $f_0(x)$ 也确定一个函数型 Φ 广义函数，而且关于 Φ^* 的弱拓扑有 $f_m\longrightarrow f_0$ $(m\longrightarrow\infty)$．

证： 由勒贝格控制收敛定理有

$$\int_R|f_0(x)\varphi(x)|dx=\lim_{m\to\infty}\int_R|f_m(x)\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant\int_R g(x)|\varphi(x)|dx\,.$$

因此，$f(x)$ 定义一个函数型 Φ 广义函数．因为

$$\lim_{m\to\infty}\int_R[f_m(x)-f_0(x)]\varphi(x)dx=0\,,$$

所以关于 Φ^* 的弱拓扑有 $f_m\longrightarrow f_0$ $(m\longrightarrow\infty)$． □

§6 广义函数的乘法与微分法

1．乘法

第 5 节已经定义了广义函数与数的乘法．为了进一步研究广义函数的乘法，我们先给出下列定义．

定义 6.1 若映射 $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ 是从基本空间 Φ 到它本身内的连续映射，则称函数 α 是 Φ 内的**乘子**.

定义 6.2 设 α 是基本空间 Φ 内的乘子，对于任意广义函数 $f \in \Phi^*$，定义乘积 αf 为

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi) \quad (\varphi \in \Phi). \tag{6.1}$$

容易看出，右边是关于 $\varphi \in \Phi$ 的连续线性泛函，因此 αf 也是 Φ 广义函数. 显然，$f \mapsto \alpha f$ 是 Φ^* 内的连续映射.

若关于 Φ^* 内的弱(或强)拓扑 $f_m \to 0(\Phi^*)$ 时，关于弱(或强)拓扑有 $\alpha f_m \to 0\ (\Phi^*)$，我们也说 α 是 Φ^* 内的乘子.

显然，多项式是任意基本空间内的乘子.

用乘积导数的莱布尼兹 (Leibniz) 法则能证明：若在 $K\{M_p\}$ 空间内，对任意 $p \geqslant r \geqslant 1$，存在 $q \geqslant p$ 和常数 C_{pr}，使得

$$M_p(x)M_r(x) \leqslant C_{pr}M_q(x), \tag{6.2}$$

则每一个 C^∞ 函数 $g(x)$ 对于某一个函数 $k(\beta)$ 满足

$$|D^\beta g(x)| \leqslant C_\beta M_{k(\beta)}(r) \quad (0 \leqslant |\beta| < \infty) \tag{6.3}$$

时是 $K\{M_p\}$ 内的乘子. 细节留作练习.

特别，C^∞ 函数 $g(x)$ 满足

$$|D^\beta g(x)| \leqslant C_\beta(1 + |x|)^{k(\beta)} \quad (0 \leqslant |\beta| < \infty) \tag{6.4}$$

时是基本空间 S 内的乘子. 任意 C^∞ 函数都是基本空间 K 内的乘子. $K(a)$ 内的乘子是 $|x| \leqslant a$ 上的 C^∞ 函数.

空间 E 的乘子域就是它自己. Z 内的乘子是对某一个 $b > 0$，$m \geqslant 0$ 时，有

$$|g(z)| \leqslant C(1 + |z^m|)\exp\{b|y|\}$$

的整解析函数.

现在设 f，g 为 Φ 广义函数，g 为函数型的，而且此函数为 Φ 内的乘子，于是，由

$$(gf, \varphi) \triangleq (f, g\varphi) \quad (\varphi \in \Phi) \tag{6.5}$$

可以定义 Φ 广义函数 gf，称为 Φ 广义函数 f 与 g 的乘积，不妨约定 $fg=gf$. 将此推广，设 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 为 k 个 Φ 广义函数，其中 $k-1$ 个为函数型的，而且为 Φ 内的乘积，则可以定义乘积 $f_1f_2\cdots f_k$. 根据我们的约定，这个乘积是可交换的.

同理，可以定义 Φ 为 K^*, S^*, $(K\{M_p\})^*$ 等时乘以函数的运算.

广义函数的乘积是普通函数的普通意义乘积的推广. 事实上，设 $f(x)$ 是函数型 Φ 广义函数，$\alpha(x)$ 是 Φ 内的乘子，则

$$
\begin{aligned}
(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi) &= \int_{\mathrm{R}} f(x)(\alpha(x)\varphi(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathrm{R}} \alpha(x) f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因此，广义函数的乘积 αf 由函数 $\alpha(x)f(x)$ 产生.

注：在考虑广义函数的乘法运算时，自然希望证明任意两个广义函数的乘积仍为广义函数，这种研究无论在理论上或实用上都有重大价值，因而成为广义函数论的重要课题之一. 早在 1954 年，施瓦兹就证明了在任何理论内不能同时有结合乘法、微分法和狄拉克测度 δ（见参考文献48）. 具体说来，他证明了不可能嵌入 $D^*(\mathrm{R})$ 到下列条件下的结合代数（不必是可交换的）A 内：

(1) 函数 $\varphi(x)=1$ ($\forall x\in \mathrm{R}^1$) 是 A 的单位元素；

(2) 函数 $1, x, x(\ln|x|-1)\in C^0(\mathrm{R})$ 中的任意两个在 A 内的乘法恒等于 $C^0(\mathrm{R})$ 内的普通乘法；

(3) 存在着线性映射（广义导数算子）D: $A \longrightarrow A$, 满足

1° D 在 A 上满足乘积导数的莱布尼兹法则：

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy), \quad (x, y\in A);$$

2° D 作用于函数 $1, x, x^2(\ln|x|-1)\in C^1(\mathrm{R})$ 是恒等于普通的 $C^1(\mathrm{R})$ 内的导数；

(4) 存在着 $\delta\in A$, $\delta\neq 0$（对应于狄拉克测度），使得 $x\delta=0$,

这个结果揭露了有效的广义函数乘法在古典分析或标准分析领域内是不可能的．然而由于理论和应用的需要，研究满足较上述结论弱的广义函数的乘法更加吸引人，这方面已有大量工作．总的看来有两种趋向，一种趋向是在 $D^*(\Omega)$ 内构造最大的子代数，即使用各种正则化程序来确定广义函数的乘积也是广义函数的最大范围．这方面的问题是：保持广义函数乘积的优越性能否补偿关于算子的结果的限制以及较好运算的传统性质的缺乏．另一种趋向是获得丰富的代数结构和适宜的导数算子，使得运算具有较小的限制，以扩大广义函数的范围使包含新的研究对象．看来这种趋向似乎同广义函数理论的初始精神——简化规则与开拓微积分运算范围一致．详情可参看文献例如7～10，12，14，15，16，28，29，55，56．

2．**微分法**

现在我们来讨论广义函数的微分法．我们总是以普通函数为背景来研究广义函数的．在研究广义函数的微分法时，我们自然首先希望对于函数型广义函数，即对于局部可积函数来建立导函数概念，然后推广到一般情形．我们知道，若 $f(x)$ 具有连续导函数，则由分部积分法，当 $\varphi(x)\in K$ 时，存在闭区间 $[a,b]$，使得 $\varphi(x)$ 在其外为 0，于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

或
$$(f',\varphi) = -(f,\varphi').$$

这启发我们，对于 K 广义函数 f，可定义一个泛函 g 如下：

$$(g,\varphi) = -(f,\varphi'). \tag{6.6}$$

易知 g 是线性泛函，而且当 $\varphi_n\longrightarrow\varphi\ (K)$ 时必然有 $\varphi'_n\longrightarrow\varphi'$，故 $(f,\varphi'_n)\longrightarrow(f,\varphi')$，因此 g 为连续线性泛函，即 $g\in K^*$．于是，当

f 在普通意义下具有连续导函数时，g 即为 f 在普通意义下的导函数. 对于一般的 $f\in K^*$,我们就可以定义 g 为 f 的导函数,或称广义导函数.

同理,若 $f(x)$ 具有 α 阶连续导函数,则由分部积分法可得,当 $\varphi(x)\in K$ 时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=(-1)^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(\alpha)}(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

或

$$(f^{(\alpha)},\varphi)=(-1)^{\alpha}(f,\varphi^{(\alpha)}). \tag{6.7}$$

于是我们可用此式定义 f 的任意阶导函数.

以上讨论表明，对于基本空间加上很强的解析条件并不是偶然的,所取的基本函数都是无限次可微的,而且当函数列在基本空间内趋于某一个极限时,不仅要函数列本身收敛,而且还要它的各阶导函数也收敛.

现在我们正式定义广义函数的导函数概念，为此还要对基本空间加上一些限制.

定义 6.3 设 Φ 是基本空间. 若对任意 $\varphi\in\Phi$,导函数 $D_i\varphi\triangleq\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots)$ 也属于 Φ,而且映射 $\varphi\mapsto D_i\varphi$ 是从 Φ 到自身的连续映射,则称 Φ 为**导空间**或对 Φ 容许微分.

显然,若 Φ 是导空间,则对任意自然数 α ,映射 $\varphi\mapsto D^{\alpha}\varphi$ 是从 Φ 到自身的连续映射.

例 6.1 基本空间 $Z\{M_p\}$ 是导空间.

证: 若 $\varphi\in Z\{M_p\}$,则

$$M_p(z)\left|\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_j}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta_j-z_j|=1}\frac{M_p(z)}{M_p(z')}\cdot\frac{M_p(z')|\varphi(z')|}{|\zeta_j-z_j|^2}|\mathrm{d}\zeta_j|\leqslant C_p\|\varphi\|_p,$$

这里 $z'=(z_1,\cdots,z_{j-1},\zeta_j,z_{j+1},\cdots,z_n)$，而 C_p 是与 φ 无关的常数,

于是得

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|_p \leqslant C_p\|\varphi\|_p,$$

即$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}\in Z\{M_p\}$，而且映射$\varphi\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$是从$Z\{M_p\}$到自身的连续映射.

例 6.2 基本空间 $K\{M_p\}$是导空间.

证: 可仿例 6.1 证之.

定义 6.4 设 Φ 是导空间，则对任意的 Φ 广义函数 f，定义它的**导函数**或称导数 $D_if=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$为

$$(D_if,\varphi)=-(f,D_i\varphi). \tag{6.8}$$

容易看出，D_if 是 Φ 内的连续线性泛函. 类似地，α 阶导函数 $D^\alpha f$ 由下式定义:

$$(D^\alpha f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,D^{|\alpha|}f). \tag{6.9}$$

显然它也属于 Φ^*. 这里$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

将(6.6)，(6.7)与(6.8)，(6.9)进行比较，可知由$D_if(x)$及$D^\alpha f(x)$所定义的广义函数依次重合于由普通函数$f(x)$所定义的广义函数的D_i导函数和D^α导函数. 因此，从泛函分析观点看，普通可微函数的导函数与它作为广义函数的导函数是一致的. 今后，有混淆可能时，我们用$[D_if]$或$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right]$及$[D^\alpha f]$表示函数的普通导函数. D_if和$D^\alpha f$也称为**广义导函数**. 这种广义导函数概念是1936年由索波列夫(Соболев)首先提出的.

广义导函数比可微函数的普通导函数有显著优点，例如有如下定理:

定理 6.1 每个广义函数都是无限次可微的，而且

$$D^{\alpha+\beta}f=D^\alpha D^\beta f.$$

证：由定义，每个广义函数都有广义导函数，它也是广义函数，因此无限次可微．这个性质可由 Φ^* 的容许微分和收敛结构得来．又

$$\begin{aligned}(D^{\alpha+\beta}f,\varphi)&=(-1)^{|\alpha+\beta|}(f,D^{\alpha+\beta}\varphi)\\&=(-1)^{|\alpha+\beta|}(f,D^{\alpha}(D^{\beta})\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(D^{\beta}f,D^{\alpha}\varphi)\\&=(D^{\alpha}(D^{\beta})f,\varphi)\end{aligned}$$

对于一切 $\varphi\in\Phi$ 成立，所以 $D^{\alpha+\beta}f=D^{\alpha}D^{\beta}f$．　□

对于普通函数，定理 6.1 不成立．若函数 $f(x)$ 确定广义函数 f，则函数 $f(x)$ 的普通意义的导函数可能不存在，而它作为广义导函数必然存在．这个导函数已经不是普通的函数，而具有较高的奇异性，如见例 6.3．

定理 6.2　广义函数的导函数与微分次序无关．

证：例如，$\forall\varphi\in\Phi$，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\ \varphi\right)&=-\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\\&=\left(f,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right)=\left(f,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}\right)\\&=-\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i},\ \varphi\right),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}.$$

一般情况可类似证明．　□

对于普通函数，定理 6.2 也不成立．我们知道，当普通函数 $f(x)$ 的二阶偏导函数存在时，可以有

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\neq\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_i}.$$

然而如把 f 看作广义函数，则广义导函数却有等式成立，这种矛盾仅是表面的．事实上，例如 f 为函数型广义函数时，两个广义导函

数相等的意义是对于一切 $\varphi\in\Phi$，总有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

这表示尽管在某些点两个导函数不相等，只要它们几乎处处相等，上述积分总是相等的.

定理 6.3 广义函数的微分运算与极限运算可以交换次序，即：若 $f_j\to f(\Phi^*)$，则

$$D^\alpha f_j\longrightarrow D^\alpha f(\Phi^*).$$

证： 因为算子 $A^*f\triangleq D^\alpha f$ 是 $A\varphi=(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi$ 的共轭算子，由第一章 § 6，作为连续线性算子的共轭算子，$D^\alpha f$ 也是连续的：若 $f_m\longrightarrow f$ 依空间 Φ^* 的弱（或强）拓扑成立，则 $D^\alpha f_m\longrightarrow D^\alpha f$ 在同一意义下成立. □

这个性质对于古典分析也不成立.

定理 6.1 至定理 6.3 说明，广义函数的运算具有高度的可以掌握的解析规律. 根据这些规律性，我们对广义函数进行运算时，往往可以免去许多古典数学分析里常遇到的顾虑和困难，这就体现了广义函数论的优越性，也是广义函数论产生和发展的背景之一.

近年来出现了广义函数的集值导数理论，可参看参考文献13.

定理 6.4（莱布尼兹公式） 设 f 是 Φ 广义函数，α 是空间 Φ 的乘子，则对于任意 $p\in\mathrm{N}$，有

$$D^p(\alpha f)=\sum_{0\leqslant q\leqslant p}\binom{p}{q}D^q\alpha D^{p-q}f.$$

证： 只证 $p=1$ 的情形，一般情形可用数学归纳法证明. $\forall\varphi\in\Phi$，

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}f+\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \varphi\right)=\left(f,\ \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\varphi\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \alpha\varphi\right)$$

$$=\left(f,\ \frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi\right)-\left(f,\ \frac{\partial}{\partial x_i}(a\varphi)\right)$$

$$=\left(f,\ \frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi\right)-\left(f,\ \frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi+a\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

$$=\left(f,-a\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=-\left(af,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(af),\ \varphi\right).$$

所以
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(af)=\frac{\partial a}{\partial x_i}f+a\frac{\partial f}{\partial x_i}.\quad\square$$

下面的定理后面将要用到.

定理 6.5 设

(1) $f(x)$是局部可积函数;

(2) 对于几乎一切$(x_2,\cdots,x_n)$,$f(x)$是x_1的绝对连续函数;

(3) 导函数$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]$对于几乎一切$(x_2,\cdots,x_n)$存在,而且等于局部可积函数$g(x)$;

(4) f和g都是$K\{M_p\}$广义函数;

(5) 函数组$\{M_p\}$满足条件(P);

则$\frac{\partial f}{\partial x_1}=g$.

证: 设$\varphi\in C_0^\infty$①,用富比尼定理和分部积分法得:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi)=\int_{R^n}f(x)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\cdots dx_n\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\cdots dx_n\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\varphi(x)dx_1$$

① C_0^∞表示具紧支集的无限可微函数的全体.

$$=\int_{\mathbf{R}^n} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = g(\varphi).$$

于是广义导函数$\frac{\partial f}{\partial x_1}$在一切属于$K\{M_p\}$的$C_0^\infty$函数集上重合于$g$．由定理 3.3，这个集在$K\{M_p\}$内稠密，因此$\frac{\partial f}{\partial x_1}=g$． □

设$P(D)$是D的幂级数．假若Φ容许微分而且对于每一个$\varphi\in\Phi$，微分算子级数$P(-D)\varphi$关于Φ的拓扑收敛，因此也是逐点收敛．记$P_m(D)$为$P(D)$的任意部分和序列，于是有

$$P_m(-D)\varphi\longrightarrow P(-D)\varphi \quad (m\to\infty)$$

关于Φ的拓扑成立．

对于任意$u\in\Phi^*$，用下式定义$P(D)u$：

$$(P(D)u,\varphi)=\lim_{m\to\infty}(P_m(D)u,\varphi). \tag{6.10}$$

因为$(P_m(D)u,\varphi)=(u,\ P_m(-D)u)$，故右边极限存在，而且与序列$P_m(D)$的选择无关．又

$$(P(D)u,\varphi)=(u,P(-D)\varphi), \tag{6.11}$$

若$P(-D)\varphi$对于Φ内有界集关于φ一致收敛，则$P(D)u\in\Phi^*$．而且事实上，$P(D)$是共轭空间Φ^*内的有界线性算子．

例 6.3 海维赛德(Heaviside)函数或单阶函数．设

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases} \tag{6.12}$$

在$x=0$有跳跃不连续点．在$x=0$时，$H(x)$通常取值 1/2，有时取作常数c，$0<c<1$，这时也记为$H_c(x)$．如在$x=a$点，海维赛德函数有不连续点，则记为$H(x-a)$．$H(x)$也记为$1(x)$．

显然，海维赛德函数是局部可积的，而且确定一个函数型K广义函数：

$$(H,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

求导函数得

$$(H',\varphi)=-(H,\varphi')=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\varphi(0)=(\delta,\varphi).$$

所以海维赛德函数的广义导函数是 δ 函数.

从上述知,$H(x)$ 的普通导函数在 $x=0$ 不存在,而当 $x\neq 0$ 时,$[H'(x)]=0$,但它的广义导函数却存在.

在广义函数论未出现以前，一些数学家曾用斯蒂尔吉斯积分来解释狄拉克测度,用积分$\int_R \varphi(x)\,\mathrm{d}H(x)$来解释$\int_R \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. 这样可以解释 δ 函数了,但对于 $\delta'(x)$ 又说不通,这也是广义函数论产生的背景之一. 详情后面再谈.

例 6.4 取实轴$(-\infty,+\infty)$ 上的基本空间 K,并考虑下面的函数:

$$f(x)\triangleq\frac{-1}{4\pi^2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{\cos 2\pi sx}{s^2}\mathrm{d}s.$$

令 f 为 $f(x)$ 所定义的 K 广义函数,对它求二阶导函数,依定义有

$$\begin{aligned}(f'',\varphi)&=(f,\varphi'')\\&=\frac{-1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2\pi sx}{s^2}\mathrm{d}x\right\}\varphi''(s)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{-1}{4\pi^2}\int_0^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos 2\pi sx\cdot\varphi''(s)/s^2)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对里面的积分,利用分部积分法,并注意到 $\varphi(x)\in K$,便得

$$\begin{aligned}(f'',\varphi)&=\int_0^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 2\pi sx\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos 2\pi sx\varphi(s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

因此我们可以规定

$$f'' = \int_0^{+\infty} \cos 2\pi s x \mathrm{d}s.$$

显然，在普通意义下，积分$\int_0^{+\infty} \cos 2\pi s x \mathrm{d}s$ 是不收敛的．但是作为广义函数，它却有确切的意义．具体地说，它就等于 f 的二阶广义导函数．

现在我们再来具体将这个积分求出来．为此，令

$$g_t(x) = \int_0^t 2\cos 2\pi s x \mathrm{d}s = \frac{\sin 2\pi t x}{\pi x}.$$

注意当 $t \to \infty$ 时，对于任何 $\varphi(x) \in K$,

$$(g_t, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin 2\pi t x \cdot \frac{\varphi(x)}{\pi x} \right) \mathrm{d}x$$

收敛于 $\varphi(0)$，因此作为广义函数，当 $t \to \infty$时，g_t 收敛于 δ 函数．但是另一方面，在广义函数的收敛意义下，显然有

$$\frac{1}{2} g_t \longrightarrow \int_0^{+\infty} \cos 2\pi s x \mathrm{d}s,$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \cos 2\pi s x \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\delta.$$

根据这个等式，我们知道，$f(x)$的二阶广义导函数就等于 δ 函数再乘以 1/2.

很久以前，电动力学和量子力学中就已经用到了这个公式，但是没有给予适当的解释．自从广义函数论出现以后，这个公式就有了严格的意义．

例 6.5 设

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1/\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

则这个函数的导函数甚至不是测度．事实上，对于任意的 $\varphi \in K$，有

$$
\begin{aligned}
(T',\varphi) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{0}^{+\infty} x^{-1/2}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty} x^{-1/2}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x^{-1/2}\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{2}x^{-3/2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right],
\end{aligned}
$$

上述推导的最后一步利用了当 $\varepsilon\longrightarrow 0^+$ 时

$$
\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} \longrightarrow 0.
$$

虽然对于 K 中的基本函数 φ，$-\frac{1}{2}x^{-3/2}\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一定可积，但整个方括号中的量

$$
\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x
$$

恒有一个有穷的极限，阿达玛 (Hadamard) 称这极限为发散积分的“有限部分”，常用记号

$$
(T',\varphi) = \mathrm{pf}\int_{0}^{+\infty} T'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x
$$

表示，其中 $T'(x)$ 是 $T(x)$ 的对于正 x 的导函数，它是不可积的点函数. 关于阿达玛的发散积分的“有限部分”，我们将在 § 8 详细讨论.

§7 δ型序列与δ函数的导函数

1. δ 型序列

在§1内我们引入δ函数概念. 这个函数无论在理论上或应用上都具有重大价值,因而有着丰富的内容. 我们也曾指出,δ函数实际上是一个测度而不是一个普通函数. 然而,它却可以用各种形式表示为普通函数的极限.

定义 7.1 设$\{f_j\}$是一个局部可积的函数序列,而且$f_j \longrightarrow \delta$ (Φ^*),则称$\{f_j\}$是一个 **δ 型序列**.

下面给出δ型序列的一个充分条件.

定理 7.1 设$\mathbf{R}^n$上的连续函数序列$f_j(x) \geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots)$产生函数型Φ广义函数,而且满足下列条件:

(1) $\forall \varphi \in \Phi$,积分$\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$对于一切$j$一致收敛;

(2) 积分$\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\mathrm{d}x$对于一切$j$一致收敛,而且

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$

(3) 在每一个不包含原点的紧集上,一致地有$f_j(x) \longrightarrow 0$;

则$f_j \longrightarrow \delta(\Phi^*)$.

证: 任取$\varphi \in \Phi$,$\varepsilon > 0$,则

$$(f_j,\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\varphi(0)\,\mathrm{d}x. \tag{7.1}$$

然而

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{|x|<a} + \int_{a\leqslant|x|\leqslant b} + \int_{|x|>b}, \tag{7.2}$$

其中右边的被积函数略去，a,b 为满足下列(7.3)，(7.4) 和 (7.5) 各式的常数。

由条件(1)及(2)知，对于任一 $\varepsilon>0$，存在 $b>0$，使得

$$\left|\int_{|x|\geq b} f_j(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right) \mathrm{d}x\right|<\varepsilon/3. \tag{7.3}$$

因为 $\varphi(x)$ 连续，故对于上述 ε，存在 $a>0$，使得 $|x|<a$ 时，

$$|\varphi(x)-\varphi(0)|<\varepsilon/3.$$

于是

$$\left|\int_{|x|\leqslant a} f_j(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\mathrm{d}x\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\int_{|x|\leqslant a} f_j(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(1+\varepsilon)\varepsilon}{3}. \tag{7.4}$$

由条件(3)，对于上述 ε，存在 $N>0$，使得 $j>N$时

$$\left|\int_{a\leqslant|x|\leqslant b} f_j(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.5}$$

由(7.3)，(7.4)及(7.5)，得

$$\left|\int_{\mathrm{R}^n} f_j(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\mathrm{d}x\right|\longrightarrow 0.\quad (j\to\infty) \tag{7.6}$$

又因

$$\int f_j(x)\varphi(0)\,\mathrm{d}x=\varphi(0)\int f_j(x)\,\mathrm{d}x\longrightarrow\varphi(0)=(\delta,\varphi), \tag{7.7}$$

由(7.1)，(7.6)及(7.7)式得 $j\longrightarrow\infty$时 $f_j\longrightarrow\delta(\Phi^*)$. □

例7.1 在 R^1 内，有柯西函数序列

$$s_m(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{m}{1+m^2x^2} \tag{7.8}$$

当 $m\to\infty$时收敛于 δ. 这是历史上最早出现的 δ 函数形式.

证： 若我们能证明序列$\{s_m(x)\}$满足

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)s_m(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(0)\,(\mathscr{D}^*,S^*), \tag{7.9}$$

则$\{s_m(x)\}$就是 δ 型序列.

这里设 $\varphi(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上有界、可积，而且在$(-\infty,+\infty)$内连续．证明可由下式得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)s_m(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(0)s_m(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)s_m(x)\mathrm{d}x, \tag{7.10}$$

其中 $g(x)=\varphi(x)-\varphi(0)$.

因为对任意固定的 m，有$\int_{-\infty}^{+\infty}s_m(x)\mathrm{d}x=1$，所以(7.10)式成为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)s_m(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)+\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)s_m(x)\mathrm{d}x.$$

于是，如果能证明

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)s_m(x)\mathrm{d}x=0, \tag{7.11}$$

则(7.9)式成立．即证明：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)s_m(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

为此目的，设A是待定正数，将区间$(-\infty,+\infty)$分成三部分，于是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}gs_m(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{-A}gs_m\mathrm{d}x+\int_{A}^{+\infty}gs_m\mathrm{d}x+\int_{-A}^{A}gs_m\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

对于积分 I_3，记$|g|$在$-A\leqslant x\leqslant A$ 内的最大值为 $M(A)$，则

$$\begin{aligned}|I_3|&\leqslant\int_{-A}^{A}|g|s_m\mathrm{d}x\leqslant M(A)\int_{-A}^{A}\frac{m}{\pi(1+m^2x^2)}\mathrm{d}x\\&=M(A)\left[\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} mA\right]\leqslant M(A).\end{aligned}$$

因为 $g(0)=0$ 而且 $g(x)$在 $x=0$ 连续，故有 $\lim\limits_{A\to+\infty}M(A)=0$．因此，$\forall\,\varepsilon>0$，存在正数 A，使得对于一切 m 的值都有$|I_3|<\varepsilon/2$.

取上述A后，余下的是证明对于充分大的m，有$|I_1+I_2|$充分小．

因为 $\varphi(x)$有界，而且$|g(x)|\leqslant|\varphi(x)|+|\varphi(0)|$，所以$|g(x)|$在

$(-\infty,+\infty)$内有界．设$|g|<b$，则

$$|I_1+I_2|\leqslant b\left[\int_{-\infty}^{-A}s_m\mathrm{d}x+\int_{A}^{+\infty}s_m\mathrm{d}x\right]=b\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}mA\right).$$

固定数A，由于$\lim\limits_{m\to+\infty}(2/\pi)\operatorname{arc\,tg}mA=1$，所以存在数$N$，使得$m>N$时，有

$$b[1-(2/\pi)\operatorname{arc\,tg}mA]<\varepsilon/2.$$

选取此N，即有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)s_m(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|I_1+I_2+I_3|\leqslant|I_1+I_2|+|I_3|<\varepsilon.$$

从而(7.11)式成立，即$s_m(x)$是δ型序列．

例 7.2　$\left\{s_m(x)=\dfrac{\sin mx}{\pi x}\right\}$是$\delta$型序列．

证： 显然，对每一个固定的自然数m，当$|x|$充分大时，$|s_m(x)|$充分地小．回忆公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{7.12}$$

令$x=-y$，我们得

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}. \tag{7.13}$$

(7.12)与(7.13)相加得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{\pi x}\mathrm{d}x=1.$$

令$x=my$得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}s_m(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}s_m(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{\pi x}\mathrm{d}x=1.$$

现在考虑

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{\pi x}\varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{7.14}$$

这里设$\varphi(x)$可微，而且$\varphi'(x)$连续、有界. 对任意$b>a>0$，有

$$\int_a^b s_m(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin mx}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{am}^{bm}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y,$$

而且
$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{am}^{bm}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y = 0.$$

同理，对于任意$a<b<0$，有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{am}^{bm}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y = 0.$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s_m(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin mx}{\pi x}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \varphi(0)\left[\lim_{m\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin mx}{\pi x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \varphi(0)\left[\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{\pi x}\mathrm{d}x\right] = \varphi(0)\ (\mathscr{D}^*, S^*).$$

其中ε是任意正数（不论如何小），而且用了积分中值定理和(7.14)式.

因此，$\left\{s_m(x) = \dfrac{\sin mx}{\pi x}\right\}$是$\delta$型序列.

例7.3 在物理学书中往往表示$\delta(x)$在$x=0$为$+\infty$，下面例子说明并不总是如此. 设

$$s_m(x) = \begin{cases} -m, & |x|<1/(2m) \\ 2m, & 1/(2m)\leqslant|x|\leqslant 1/m \\ 0, & 其它 \end{cases} \tag{7.15}$$

则$\lim\limits_{m\to\infty} s_m(x) = -\infty$，然而它是一个$\delta$型序列.

证： 对于任意m，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_m(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{7.16}$$

设 $f(x)$ 有界、可积而且在 $x=0$ 连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)s_m(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} s_m(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)s_m(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)s_m(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $g(x)=f(x)-f(0)$. 由 $s_m(x)$ 的定义，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)s_m(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2m\int_{-1/m}^{-1/(2m)} g(x)\mathrm{d}x - m\int_{-1/(2m)}^{1/(2m)} g(x)\mathrm{d}x$$

$$+ 2m\int_{1/(2m)}^{1/m} g(x)\mathrm{d}x, \tag{7.17}$$

因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续，而且 $g(0)=0$，于是对于任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得 $|x|<1/N$ 时，$|g(x)|<\varepsilon/3$. 由(7.17)知，对于一切 $m>N$，有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)s_m(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant 2m\int_{-1/m}^{-1/(2m)} |g(x)|\mathrm{d}x + m\int_{-1/(2m)}^{1/(2m)} |g(x)|\mathrm{d}x$$

$$+ 2m\int_{1/(2m)}^{1/m} |g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\left[2m\left(-\frac{1}{2m}+\frac{1}{m}\right)+m\left(\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}\right)\right.$$

$$\left.+ 2m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}\right)\right] = \varepsilon.$$

所以当 $f(x)\in\mathscr{D}$ 时有

$$\lim_{m\to\infty}(s_m, f) = \lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s_m(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0) = (\delta, f) \quad (\mathscr{D}^*),$$

即 $s_m(x)$ 为一 δ 型序列.

例 7.4 下面我们来证明统计理论中的高斯(Gauss)序列

$$s_m(x)=(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2} \tag{7.18}$$

是一个 δ 型序列。

设函数 $f(x)$ 有界、可积而且在 $x=0$ 连续. 我们证明

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}f(x)\mathrm{d}x=f(0)\quad(\mathscr{D}^*,S^*). \tag{7.19}$$

证: 如例7.3,我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}f(x)\mathrm{d}x=f(0)+\int_{-\infty}^{+\infty}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.20}$$

又

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}g(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{-\infty}^{-A}+\int_{A}^{+\infty}+\int_{-A}^{A}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}g(x)\,\mathrm{d}x\right|,\end{aligned} \tag{7.21}$$

其中 A 是一个有限正实数. 由于 $f(x)$ 的有界性, 存在正数 M, 使得 $|g(x)|=|f(x)-f(0)|\leqslant M$, 于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M\left|\int_{-\infty}^{-A}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}\mathrm{d}x\right|\\&=\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-A\sqrt{m}}e^{-y^2}\mathrm{d}y\to 0\quad(m\to\infty).\end{aligned}$$

同理,(7.21)式中第二个积分当 $m\to\infty$ 时也趋向零.

最后,利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性, 给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|x|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon.$$

如果选取 A, 使得 $2A<\delta$, 则

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-A}^{A}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{-A}^{A}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}|g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\varepsilon\int_{-A}^{A}(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-A\sqrt{m}}^{A\sqrt{m}} e^{-y^2} dy \to \varepsilon \quad (m \to \infty). \tag{7.22}$$

综合(7.20)～(7.22)即得(7.19).

例 7.5 空间 R^n 内的开尔文 (Kelvin) 热源函数 ($t>0$, $\mu>0$):

$$\lim_{t\to 0} (4\pi\mu t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\mu t}\right) = \delta \quad (\mathscr{D}^*, S^*).$$

例 7.6 空间 R^n 内球形函数

$$p_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{k}{\varepsilon^n} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

其中 k 为满足下列条件的常数:

$$\frac{1}{k} = \int_{|x|\leqslant 1} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) dx,$$

则

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon = \delta \quad (\mathscr{D}^*, S^*, E^*).$$

例 7.7 空间 R^n 内的瓦莱-普桑(Valle-Poussin),兰道(Landau),东乃里函数($a>0$):

$$p_j(x, a) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n/2+j+1)}{\pi^{n/2} j!} a^n \left(1 - \frac{|x|^2}{a^2}\right)^j, & |x| < a \\ 0, & |x| \geqslant a \end{cases}$$

则

$$\lim_{j\to\infty} p_j(x, a) = \delta \quad (\mathscr{D}^*, S^*, E^*).$$

此外,还有许多其它的 δ 型序列,这里从略.

对 x 微分 δ 型序列, 可得许多收敛于 δ 函数的各阶导函数的序列. 例如

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'.$$

等.

2. δ 函数的导函数

在§6内已知在R内 δ 函数是海维赛德函数的导函数：

$$(H',\varphi)=(\delta,\varphi),$$

或写为

$$(1'_+,\varphi)=(\delta,\varphi).$$

于是 $\delta_{(a)}$ 的导函数显然为

$$(\delta_{(a)}^{(p)},\varphi)=(-1)^p(\delta_{(a)},\varphi^{(p)}(x))=(-1)^p\varphi^{(p)}(a),$$

即

$$D^{p+1}1_+=D^p1'_+=D^p(\delta).$$

又由

$$\begin{aligned}(\alpha\delta',\varphi)&=(\delta',\alpha\varphi)\\&=(\delta,-(\alpha\varphi)')\\&=(\delta,-(\alpha'\varphi+\alpha\varphi'))\\&=-\varphi(0)\alpha'(0)-\alpha(0)\varphi'(0)\\&=(\alpha(0)\delta'-\alpha'(0)\delta,\varphi),\end{aligned}$$

所以

$$\alpha\delta'=\alpha(0)\delta'-\alpha'(0)\delta,$$

从而

$$\alpha\delta^{(p)}=\sum_{q=0}^{p}(-1)^{p+q}\binom{p}{q}\alpha^{(p-q)}(0)\delta^{(q)},$$

其中 α 是乘子.

对于多变数情形：设 1_{x_k} 为单变数 x_k 的海维赛德函数，即 $1_{x_k}\equiv 1_+(x_k)$，则乘积

$$1_+(x)=(1_{x_1})\cdots(1_{x_n})=\begin{cases}1, & x_k\geqslant 0 \quad k=1,\cdots,n\\0, & 其它\end{cases}$$

决定函数型广义函数

$$(1_+,\varphi)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\varphi(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

令 $\quad(1_{(k)},\varphi)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\varphi(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k,$

则有

$$1_{(n)}=1_+,$$

$$D_k1_{(k)}=1_{(k-1)},$$

$$\frac{\partial^{n-k}}{\partial x_{k+1}\cdots\partial x_n}1_{(n)} = 1_{(k)},$$

$$(D^p\delta,\varphi) = (-1)^{|p|}D^p\varphi(0).$$

又因 $(\alpha D^p\delta,\varphi) = (-1)^{|p|}(\delta, D^p(\varphi\alpha))$

$$= (-1)^{|p|}\left(\delta,\ \sum_{q\leqslant p}\binom{p}{q}D^{p-q}\alpha D^q\varphi\right)$$

$$= (-1)^{|p|}\sum_{q\leqslant p}\binom{p}{q}D^{p-q}\alpha(0)(D^q\varphi(0))$$

$$= \sum_{q=0}^{p}(-1)^{|p+q|}\binom{p}{q}D^{p-q}\alpha(0)(D^q\delta,\varphi),$$

所以
$$\alpha D^p\delta = \sum_{q=0}^{p}(-1)^{|p+q|}\binom{p}{q}D^{p-q}\alpha(0)D^q\delta.$$

证明略.

§8 发散积分的有限部分

1.基本概念

前面讨论了函数型广义函数和 δ 函数，现在讨论一些简单的非函数型广义函数．它们是由某些发散积分所产生的，通常称为阿达玛的发散积分的有限部分．

我们仅就一元函数的情形进行讨论，一般情形可类似处理．

设 $f(x)$是有限区间$[a+\varepsilon,b]$($\varepsilon>0,a+\varepsilon<b$)上的复值可积函数，但在开区间$(a,b)$内不可积，则由分出奇点法，可得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(x-a)^{\lambda_k}} + h(x), \tag{8.1}$$

其中 λ_k 和 A_k 都是复常数，而且实部 $\mathrm{Re}(\lambda_k)\geqslant 1$，$h(x)$是区间

(a,b)内的复值可积函数.

我们先假定所有的 λ_k 都不是整数，则

$$\begin{aligned}
&\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\lambda_k-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\lambda_k-1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_k-1} \\
&\quad + \int_{a+\varepsilon}^{b} h(x)\mathrm{d}x \\
&= I(\varepsilon)+F(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{8.2}$$

其中

$$I(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\lambda_k-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_k-1},$$

$$F(\varepsilon)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\lambda_k-1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_k-1}+\int_{a+\varepsilon}^{b} h(x)\mathrm{d}x.$$

显然，当 $\varepsilon\to0^+$ 时，$I(\varepsilon)\to\infty$，而 $F(\varepsilon)$ 却趋向于一个确定的数. 这个数可以定义为发散积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的“值”. 阿达玛称它为发散积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的有限部分，用 $\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示，即

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\triangleq \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x - I(\varepsilon)\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\lambda_k-1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_k-1}+\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

现在，我们假定 λ_k 中有整数. 显然，只有当 $\lambda_k=1$ 时，(8.2) 中的 $I(\varepsilon)$和 $F(\varepsilon)$才可能有变动. 不失一般性，我们设 $\lambda_1=1$，于是

$$f(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{A_k}{(x-a)^{\lambda_k}}+\frac{A_1}{x-a}+h_1(x).$$

仿照上面方法可得：

$$I_1(\varepsilon) \triangleq \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k}{\lambda_k - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_k - 1} + A_1 \ln\frac{1}{\varepsilon},$$

$$F_1(\varepsilon) \triangleq \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k}{\lambda_k - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_k - 1} + A_1 \ln(b-a) + \int_{a+\varepsilon}^{b} h_1(x)\mathrm{d}x.$$

显然，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，$I_1(\varepsilon) \to \infty$，而 $F_1(\varepsilon)$ 趋向于一个确定的数。仿上，可以定义这个数为发散积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的"值"，也表示为

$$\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x - I_1(\varepsilon)\right]$$

$$= -\sum_{k=2}^{n} \frac{A_k}{\lambda_k - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_k - 1} + A_1 \ln(b-a) + \int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x. \tag{8.4}$$

综合上述得：

定义 8.1 设 $f(x)$ 为有限区间 $[a+\varepsilon, b]$ $(a+\varepsilon<b, \varepsilon>0)$ 上的复值可积函数，但在区间 (a,b) 内不可积，则可将 $f(x)$ 用 (8.1) 式表示。这时，依 λ_k 中有无整数部分依次定义发散积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的值由(8.4)或(8.3)表示，这时也说 $f(x)$ 在 (a,b) 上 pf **可积**.

注：(1) 同样可定义 b 为奇点的情形，也可以在无限区间内讨论。(a,b) 内奇点个数可以多于一个，甚至是局部有限的无限个奇点.

(2) 容易看出，定义 8.1 是普通瑕积分柯西主值的自然推广，

黎斯把它看作普通积分的解析开拓.

2.**性质**

普通积分关于等式的性质,对于发散积分的有限部分也成立.例如有以下定理:

定理 8.1 (1) 若 $f(x)$pf 可积,则$|f(x)|<\infty$. p.p.;

(2) 若 $f(x)=g(x)$, p.p.,则 $f(x)$ pf 可积, $g(x)$与 $f(x)$ 有同一奇点 a,则 $g(x)$也 pf 可积,且

$$\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{pf}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 若 $f(x)$,$g(x)$都 pf 可积,α, β 为复数,则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 也 pf 可积,而且

$$\mathrm{pf}\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\alpha\cdot\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\cdot\mathrm{pf}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

(4) $$\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{pf}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\mathrm{pf}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $c\in(a,b)$.

证明留作练习.

发散积分的有限部分也可以在积分号下求导数.

值得注意的是,普通积分关于不等式的性质一般说来不成立,这是因为我们舍去了无限部分之故.

若 $\varphi(x)$无穷可微,则函数 $f(x)\varphi(x)$在(a,b)内有类似于 $f(x)$ 的性质. 于是当 $f(x)$不可积时,也能定义发散积分的有限部分

$$\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{8.5}$$

可以证明,当 $\varphi\in\mathscr{D}$时,即为空间$\mathscr{D}$上的连续线性泛函. 施瓦兹称它为**伪函数**,记为

$$\mathrm{PF}\cdot g(\varphi)=\mathrm{pf}\int_a^b g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.6}$$

3. 例

例 8.1 在§6内已知海维赛德函数定义为

$$1_+(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

考虑矩函数 $1_+(t)t^{-\frac{3}{2}}$，这里 $t>0$． 我们取 $t^{-\frac{3}{2}}$ 为 t^{-3} 的正平方根．它是非函数型广义函数，因为积分

$$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad (\varphi\in\mathscr{D}) \tag{8.7}$$

一般是发散的．然而由阿达玛的有限部分可定义一个$\mathscr{D}$广义函数，其过程如下：

由泰勒(Taylor)余项公式，令

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\psi(t). \tag{8.8}$$

因为 $\varphi(t)\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$，所以 $\psi(t)$ 对一切 $t\neq 0$ 都是连续函数，而且能连续开拓至 $t=0$． 若 b 是充分大的实数，使 $t>b$ 时 $\varphi(t)=0$，则 (8.7) 式变为

$$(1_+(t)t^{-\frac{3}{2}},\varphi(t))=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^b t^{-\frac{3}{2}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{2\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{2\varphi(0)}{\sqrt{b}}+\int_\varepsilon^b\frac{\psi(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right]. \tag{8.9}$$

若 $\varphi(0)\neq 0$，则括号内第一项当 $\varepsilon\to 0^+$ 时趋于∞，于是

$$\mathrm{pf}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^b\frac{\psi(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t-\frac{2\varphi(0)}{\sqrt{b}}. \tag{8.10}$$

此式显然是$\mathscr{D}$上的线性泛函．为了证明它的连续性，注意到在区间 (a,b) 内有不等式

$$|\psi(t)|=\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\right|=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sup_{0<t<b}|\varphi'(t)|,$$

于是
$$\left|\int_0^b \frac{\psi(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\sqrt{b}\sup_{0<t<b}|\varphi'(t)|.$$
因此，若序列$\{\varphi_m\}$在$\mathscr{D}$内收敛于零，由(8.10)式得数列
$$\left\{\mathrm{pf}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\varphi_m(t)\mathrm{d}t\right\}$$
也收敛于0，即泛函连续. 我们记这个广义函数为
$$\mathrm{pf}(t^{-\frac{3}{2}}1_+(t)), \tag{8.11}$$
并且对$\mathscr{D}$内每个φ由(8.10)式取值.

综合(8.8)式与(8.10)式，令$b\to+\infty$得
$$\begin{aligned}&(\mathrm{pf}t^{-\frac{3}{2}}1_+(t),\varphi(t))\\ &\triangleq \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_\varepsilon^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\varphi(t)\mathrm{d}t-\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right]\\ &=\int_0^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}[\varphi(t)-\varphi(0)]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{8.12}$$

同理能构造$\mathscr{D}$广义函数
$$\mathrm{pf}t^{\beta}1_+(t),$$
这里$-2<\beta<-1$，而t^β限于它的一支（即$t>0$时$\arg t^\beta=2n\pi\beta$，n是一个固定的整数）. 这时我们有
$$\begin{aligned}&(\mathrm{pf}t^{\beta}1_+(t),\varphi(t))\\ &\triangleq \mathrm{pf}\int_0^{+\infty} t^{\beta}\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &\triangleq \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_\varepsilon^{+\infty} t^{\beta}\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{\varphi(0)\varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1}\right]\\ &=\int_0^{+\infty} t^{\beta}[\varphi(t)-\varphi(0)]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{8.13}$$

对于广义函数$\mathrm{pf}|t|^\beta 1_+(t)(-2<\beta<-1)$，能类似证明
$$\begin{aligned}&(\mathrm{pf}|t|^{\beta}1_+(-t),\varphi(t))\\ &\triangleq \mathrm{pf}\int_{-\infty}^{0} |t|^{\beta}\varphi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}|t|^\beta\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{\varphi(0)\varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{0}|t|^\beta[\varphi(t)-\varphi(0)]\mathrm{d}t. \tag{8.14}$$

最后，定义$\mathscr{D}'$广义函数 $\mathrm{pf}|t|^\beta$ 为

$$\mathrm{pf}|t|^\beta\triangleq\mathrm{pf}|t|^\beta 1_+(-t)+\mathrm{pf}t^\beta 1_+(t)], \tag{8.15}$$

这里 $t^\beta(t>0)$ 与$|t|^\beta(t<0)$限于同一支.

例 8.2　考虑发散积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t.\quad(\varphi\in\mathscr{D}) \tag{8.16}$$

这时有

$$\left(\frac{1_+(t)}{t},\ \varphi(t)\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\varphi(0)\ln b-\varphi(0)\ln\varepsilon+\int_\varepsilon^b\psi(t)\mathrm{d}t\right].$$

去掉无限部分 $\varphi(0)\ln\varepsilon$，得

$$\left(\mathrm{pf}\frac{1_+(t)}{t},\ \varphi(t)\right)\triangleq\int_0^b\psi(t)\mathrm{d}t+\varphi(0)\ln b. \tag{8.17}$$

也能写成

$$\left(\mathrm{pf}\frac{1_+(t)}{t},\ \varphi(t)\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t+\varphi(0)\ln\varepsilon\right]$$

$$=\int_0^1\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t. \tag{8.18}$$

如前，能证明(8.17)式定义$\mathscr{D}'$广义函数. 类似地可定义$\mathscr{D}'$广义函数$\mathrm{pf}\dfrac{1_+(-t)}{|t|}$与$\mathrm{pf}\dfrac{1}{|t|}$为

$$\left(\mathrm{pf}\frac{1_+(-t)}{|t|},\ \varphi(t)\right)$$

$$\triangleq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{|t|}\mathrm{d}t+\varphi(0)\ln\varepsilon\right]$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{|t|}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{-1}\frac{\varphi(t)}{|t|}\mathrm{d}t \tag{8.19}$$

和

$$\mathrm{pf}\frac{1}{|t|}\triangleq \mathrm{pf}\frac{1_+(-t)}{|t|}+\mathrm{pf}\frac{1_+(t)}{t}. \tag{8.20}$$

例 8.3 我们考虑发散积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t \quad (\varphi\in\mathscr{D})$$

的柯西主值. 由定义,它是有限量

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t\triangleq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t. \tag{8.21}$$

易知(8.21)内极限存在而且是(8.18)式与(8.19)式的差. 事实上,(8.21)也定义为广义函数,记为 $\mathrm{pv}\ \frac{1}{t}$,它是$\mathscr{D}$广义函数:

$$\mathrm{pv}\frac{1}{t}\triangleq \mathrm{pf}\frac{1_+(t)}{t}-\mathrm{pf}\frac{1_+(-t)}{|t|}. \tag{8.22}$$

注意,发散积分的有限部分存在时,柯西主值可以不存在. 例如:

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{|t|}\mathrm{d}t\triangleq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(t)}{|t|}\mathrm{d}t\right]$$

当 $\varphi(0)\neq 0$ 时不存在,然而

$$\mathrm{pf}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{|t|}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(t)}{|t|}\mathrm{d}t+2\varphi(0)\ln\varepsilon\right]$$

存在.

例 8.4 函数 $\frac{1}{\sin t}$ 有奇点,$t=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 我们依

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+h(t)$$

来定义 $h(t)$. 在区间 $0\leqslant t\leqslant\pi/2$ 内 $h(t)$连续,而且 $h(0)=0$,这种情况导出$\mathscr{D}$广义函数

$$f_1(t)\triangleq\text{pf}\frac{1_+(t)1_+(\pi/2-t)}{\sin t}$$

$$=\text{pf}\frac{1_+(t)1_+(\pi/2-t)}{t}+1_+(t)1_+(\pi/2-t)h(t).$$

类似地,对区间 $-\pi/2\leqslant t\leqslant0$,得到$\mathscr{D}$广义函数

$$f_2(t)\triangleq\frac{1_+(\pi/2+t)1_+(-t)}{\sin t}$$

$$\triangleq\text{pf}\frac{1_+(\pi/2+t)1_+(-t)}{t}+1_+(\pi/2+t)1_+(-t)h(t).$$

令 $f=f_1+f_2$,则

$$(f,\varphi)=(f_1+f_2,\varphi)=\text{pf}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\varphi(t)}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{-\pi/2}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\right)\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}h(t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

最后,由正弦函数的周期性得出由有限部分 $\text{pf}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{\sin t}\mathrm{d}t$ 产生的$\mathscr{D}$广义函数

$$\text{pf}\frac{1}{\sin t}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu}f(t-\nu\pi).$$

例 8.5 考虑发散积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t}\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad\varphi\in\mathscr{D}.\tag{8.23}$$

如前面所作,我们取 $\varphi(t)=\varphi(0)+t\psi(t)$,而且取上限充分大,使

$t>b$ 时 $\varphi(t)=0$，得

$$2\int_{\varepsilon}^{b}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=(\ln b)^2-(\ln\varepsilon)^2.$$

因此，(8.23)式等于

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\int_{\varepsilon}^{b}\psi(t)\ln t\mathrm{d}t+\frac{\varphi(0)}{2}[(\ln b)^2-(\ln\varepsilon)^2]\right\}.$$

去掉无限项$(\ln\varepsilon)^2$，得到$\mathscr{D}$广义函数

$$\mathrm{pf}\frac{1_+(t)\ln t}{t}. \tag{8.24}$$

于是得

$$\left(\mathrm{pf}\frac{1_+(t)\ln t}{t},\varphi(t)\right)$$

$$\triangleq\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\ln t}{t}\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{\varphi(0)}{2}(\ln\varepsilon)^2\right].$$

可以用前法证明(8.24)是广义函数.

由阿达玛的发散积分的有限部分产生的广义函数也可由广义函数的微分法产生.

例 8.6 考虑函数型广义函数 $1_+(t)t^\alpha$，其中 $-1<\alpha<0$，$-\infty<t<+\infty$ 或 t^α 作为多值函数时取 $|t|^\alpha e^{i2n\pi\alpha}$，这时 n 取某个整数. 它的导函数由下式决定：

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1_+(t)t^\alpha),\ \varphi(t)\right)=(1_+(t)t^\alpha,\ -\varphi'(t))$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^\alpha\varphi'(t)\mathrm{d}t.\quad(\varphi\in\mathscr{D})$$

用分部积分法即得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\alpha\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^{\alpha-1}\varphi(t)\mathrm{d}t+\varepsilon^\alpha\varphi(\varepsilon)\right].$$

因为 $\varphi(\varepsilon)=\varphi(0)+O(\varepsilon)(\varepsilon\to0^+)$，所以上式也可写作

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\alpha\int_\varepsilon^{+\infty}t^{\alpha-1}\varphi(t)\mathrm{d}t+\varepsilon^\alpha\varphi(0)\right].$$

于是由(8.13)式我们证明了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^\alpha 1_+(t)]=\mathrm{pf}\,\alpha t^{\alpha-1}1_+(t).$$

关于发散积分的阿达玛的有限部分就介绍到这里，详情见参考文献17，18，19和53.

§9 $K\{M_p\}$广义函数的结构

1. $K\{M_p\}$广义函数的结构

广义函数论中最重要的问题之一是发现由作用于函数或测度的微分算子所表示的广义函数的结构．本节将对于空间 $K\{M_p\}$ 上的广义函数得到有关定理.

定理9.1 任意($K\{M_p\}$)广义函数 f 都可表示为斯蒂尔吉斯积分：

$$f(\varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{R_M^n}M_p(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}\sigma_\alpha(x).\tag{9.1}$$

这里 $p\geqslant 1$，$\sigma_\alpha(x)$ 是 R_M^n 上的测度，而且集中于使 $M_p(x)$ 有限的那些点所成的集上．又 f 在 Φ_p 上的范数等于

$$\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{R_M^n}|\mathrm{d}\sigma_\alpha(x)|.\tag{9.2}$$

证： 由第一章§4，f 是某个 Φ_p 上的连续线性泛函．对于每一个 $\varphi\in\Phi_p$，由(9.1)式作出一切向量函数

$$\psi_\alpha(x)\triangleq M_p(x)D^\alpha\varphi(x)\quad(0\leqslant|\alpha|\leqslant p,x\in R_M^n)\tag{9.3}$$

的全体，可得到 Φ_p 映到连续函数组$\{\psi_\alpha(x)\mid 0\leqslant|\alpha|\leqslant p\}$所成空间内的映射，显然，对应 $\varphi(x)\mapsto\{\psi_\alpha(x)\}$是一对一的.

令 Γ 是 R_M^n 上的一切连续函数 $h(x)$ 所组成的赋范线性空间，

其范数为

$$\|h\| \triangleq \sup_{x\in R_M^n} |h(x)|.$$

又设 ν 为$\{\psi_\alpha(x)\}$内 α 的个数，Γ^ν 是 ν 个恒等空间 Γ 的笛卡儿乘积. Γ^ν 内的范数取为分量范数的和，向量函数 $\{\psi_\alpha\}$ 组成 Γ^ν 的线性子空间，记为 Δ^ν. 设它的范数为 Γ^ν 的范数. 因为 $f\in\Phi_p^*$，于是泛函 $L(\{\psi_\alpha\})\triangleq f(\varphi)$是 Δ^ν 上的连续线性泛函. 由哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理，L 能保范地延拓为 Γ^ν 上的连续线性泛函 $\tilde{L}$，从而由黎斯定理 $\tilde{L}$ 能表示为

$$\tilde{L}(\theta) = \sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{R_M^n}\theta_\alpha(x)\mathrm{d}\sigma_\alpha(x), (\theta=\{\theta_\alpha\}\in\Gamma^\nu) \qquad (9.4)$$

这里 σ_α 是测度，而且

$$\|\tilde{L}\| = \sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{R_M^n}|\mathrm{d}\sigma_\alpha(x)|.$$

应用(9.4)于 Δ^ν 的元素 $\theta=\{\psi_\alpha\}$即得(9.1). □

注：由哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理知这里 $f(\varphi)$的表示不唯一.

为了得到更精细的表示，我们要对 M_p 作下列假定：

(N_1) 对于每一个整数 $p\geqslant 1$，存在整数 $p'>p$，使

$$m_{pp'}(x)\triangleq\frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} \qquad (9.5)$$

在 R_M^n 上是可积的.

(N_2) 对于每一个整数 $p\geqslant 1$，存在整数 $p''>p$，使

$$\frac{M_p(x)}{M_{p''}(x')}\leqslant C_p \quad (C_p \text{ 是常数}) \qquad (9.6)$$

对任意 $x\in R_M^n$ 及 $|x-x'|<1$成立.

定理 9.2　设 M_p 满足条件(N_1)及(N_2)，则任意 $(K\{M_p\})$广义函数 f，都可表示为

$$(f,\varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{R_M^n}M_p(x)f_\alpha(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{9.7}$$

对于某个整数 $p\geqslant1$ 及对于某个可测的本性有界函数 $f_\alpha(x)$ 成立，又 Φ 上的范数依

$$\|\varphi\|'_p=\sup_{|\alpha|\leqslant p}\int_{R_M^n}M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|\mathrm{d}x \tag{9.8}$$

表示时，f 的范数等于

$$\sum_{|\alpha|\leqslant p}\operatorname{essen}\sup_{x\in R_M^n}|f_\alpha(x)|. \tag{9.9}$$

证： 先证明(9.8)式与范数

$$\|\varphi\|_p=\sup_{|\alpha|\leqslant p}\sup_{x\in R_M^n}M_p(x)|D^\alpha(x)|$$

是等价范数．若 $x\in R_M^n$，有

$$M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|=m_{pp'}(x)M_{p'}(x)|D^\alpha\varphi(x)|.$$

两边积分取上确界，得

$$\|\varphi\|'_p\leqslant B_p\|\varphi\|_{p'}\quad\left(B_p\triangleq\int_{R_M^n}m_{pp'}(x)\mathrm{d}x\right). \tag{9.10}$$

现在用 $\|\varphi\|'_p$ 来估计 $\|\varphi\|_p$．为此，先证明不等式

$$|\varphi(x)|\leqslant A\sum_{|\beta|\leqslant q}\int_{|\xi-x|<1}|D^\beta\varphi(\xi)|\mathrm{d}\xi \tag{9.11}$$

对任意 $x\in\mathrm{R}^n$ 成立，这里 A, q 与 φ 无关．$q=n$ 时不等式也正确．事实上，设 $\nu(0)=1$，$|t|\geqslant\varepsilon$ 时，$\nu(t)=0$（ε 是固定的正数）．因为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\nu(0)\varphi(x)-\nu(-\varepsilon)\varphi(x_1-\varepsilon,x_2,\cdots,x_n)\\&=\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}[\nu(\xi_1-x_1)\varphi(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)]\mathrm{d}\xi_1\\&=\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\xi_1}\varphi+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right)\mathrm{d}\xi_1,\end{aligned}$$

于是

$$|\varphi(x)|\leqslant A_0\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}|\varphi(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)|\mathrm{d}\xi_1$$

$$+A_0'\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}\left|\frac{\partial}{\partial\xi_1}\varphi(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)\right|\mathrm{d}\xi_1.$$

同理，在上述不等式的被积函数中进行同样推证，但用 $x_2,\nu(x_2)$ 代替 $x_1,\nu(x_1)$. 逐步进行下去，即得不等式(9.11)，其中取 $\varepsilon\sqrt{n}<1$.

在(9.11)中以 $D^\alpha\varphi$ 代替 φ 而且假定 $p''\geqslant p+q$，则当 $x\in R_M^n$ 时有

$$M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|$$

$$\leqslant A\sum_{|\beta|\leqslant q}\int_{\substack{|\xi-x|<1\\ x\in R_M^n}}\frac{M_p(x)}{M_{p''}(\xi)}M_{p''}(\xi)|D^{\alpha+\beta}\varphi(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant A'C_p\|\varphi\|_{p''}.\quad (A'\text{ 是常数})$$

因此

$$\|\varphi\|_p\leqslant A'C_p\|\varphi\|_{p''}'. \tag{9.12}$$

由(9.10)及(9.12)知范数序列 $\{\|\cdot\|_p\}$ 与 $\{\|\cdot\|_p'\}$ 等价.

现在来证明定理. 给定广义函数 f，仿照证明定理9.1的方法，而以范数 $\|\cdot\|_p'$ 代替 $\|\cdot\|_p$. 在空间 Γ^ν 上采用范数

$$\|\theta\|=\sum_{j=1}^{\nu}\int_{R_M^n}|\theta_j(x)|\mathrm{d}x, \tag{9.13}$$

这里 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_\nu)\in\Gamma^\nu$，$L(\{\psi_\alpha\})\triangleq f(\varphi)$ 是子空间 Δ^ν 上的连续线性泛函，因为以(9.13)为范数的空间 Γ^ν 上的每个连续线性泛函 T 都有

$$T(\theta)=\sum_{j=1}^{\nu}\int_{R_M^n}\theta_j(x)g_j(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $g_j(x)$ 是可测的本性有界函数，而且

$$\|T\|=\sum_{j=1}^{\nu}\underset{x\in R_M^n}{\text{essen sup}}|g_j(x)|.\ \square$$

2. S 广义函数的结构

下面我们来考虑急减 C^∞ 函数的空间 S．这时条件(N_1),(N_2)显然满足,$R^n_M=R^n$ 而且(9.7)式右边每一项能写为

$$(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(M_p f_\alpha)\varphi, \tag{9.14}$$

这里 $M_p f_\alpha$ 是空间 S 上的函数型泛函．对于每一个积分

$$I_i \triangleq \int_{-\infty}^{x} M_p f_\alpha \mathrm{d}x_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

我们能应用定理 6.3,于是 $D_i I_i = M_p f_\alpha$ 可当作 S^* 的元素，对任意重积分同样成立．因此(9.14)内的每个泛函对一切 α 都能写为形式 $D^\beta g_\alpha$,而且 g_α 是 R^n 上满足不等式

$$|g_\alpha(x)| \leqslant A_\alpha(1+|x|^2)^m$$

的连续函数．于是我们已经证明了下列定理：

定理 9.3 每个 S 广义函数 f 能表示为

$$f = D^\beta[(1+|x|^2)^m F(x)], \tag{9.15}$$

这里 $F(x)$ 是($f_\alpha(x)$和它们的原函数(到 p 阶)的线性组合)R^n 上的某个连续有界函数,β,m 是与 f 无关的自然数．

注：定理 9.3 说明若每个 S 广义函数都是 R^n 上的一个缓增连续函数的某阶广义导函数,则 T 必为 S 广义函数．事实上,设 $T=D^\beta f$,这里 f 为缓增连续函数,则当 $\varphi\in\mathscr{D}$时

$$(T,\varphi)=(D^\beta f,\varphi)=(-1)^{|\beta|}(f,D^\beta\varphi)$$
$$=(-1)^{|\beta|}\int_{R^n} f(x)D^\beta\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

如取 $\varphi\in S$,则由定理 5.2 知上述积分确定一个 S 广义函数 T，这说明(9.15)是 $\mathscr{D}$ 广义函数为 S 广义函数的特征性质,所以也称 S 广义函数为缓增广义函数．类似的,定理 9.1 与 9.2 之逆也成立．

设 f 跑遍 S^* 内的有界集 B',依第一章定理 5.4,B' 包含于某个 Φ_p^* 内而且依 Φ_p^* 的范数$\|\cdot\|_p$ 有界．因此，定理 9.2 内的表示式对一切 $f\in B'$ 及同一 p 成立，而且数(9.9)的集也是有界的，继续定理 9.3 的类似证明,即得：

定理 9.4　若 B' 是 S^* 内的有界集，则对于每一个 $f\in B'$，存在具同一 β 和 m 的形如(9.15)的表示，而且连续函数族 $\{F(x)\mid F\in B'\}$ 在 R^n 上一致有界.

定理 9.5　若 $T_j\longrightarrow 0(S^*)$，则对某个 β 和 m 成立

$$T_j=D^\beta[(1+|x|^2)^m F_j(x)],\qquad(9.16)$$

这里 $F_j(x)$ 是连续有界函数，而且

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{x\in\mathrm{R}^n}|F_j(x)|=0.\qquad(9.17)$$

证： 在定理 9.2 和定理 9.3 的证明中，赋予 L^2 范数代替 L^1 范数，以下边较弱的不等式

$$|\varphi(x)|\leqslant A\sum_{|\beta|\leqslant q}\left[\int\!\!\int_{|\xi-x|\leqslant 1}|D^\beta\varphi(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}$$

代替(9.11)式，用下列范数代替范数(9.8)式：

$$\sup_{|\alpha|\leqslant p}\left[\int\!\!\int_{R_N^n}(M_p(x))^2|D^\alpha\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

最后，代替应用哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理延拓 $L(\{\psi\})$，换为保范地延拓为 L_N^2 上的连续线性泛函即可，细节留给读者. □

关于 $\mathscr{D}$ 广义函数，我们将在下一章详细讨论.

第三章　分　布　论

本章讨论施瓦兹的分布理论，主要是K(或$\mathscr{D}$)广义函数理论. 前一章谈到的一般广义函数的理论如结构定理等对于分布也成立，但是作为一种特殊的然而是重要的广义函数，分布也有其特殊性，例如结构定理就是这样，一般广义函数没有类似性质的一些结果，然而有一些也能推广到某些广义函数类如$K\{M_p\}$广义函数等. 本章开始是基础理论，包括空间K的建立、单位分解定理以及分布的定义与初等性质、局部分布等. §5到§7讨论分布的微分法、积分法与除法，它们有广泛的应用，我们在这里只是举一些简单的例子. §8讨论分布的结构，由此可以看出分布理论本质上是推广函数的导函数概念，使得某些不可导的函数（如连续函数）在广义导函数意义下可以"求导"，以取得较为广泛的应用. §9到§12讨论分布的进一步运算——直积、卷积和它们的一些应用. §13讨论一些较为一般的广义函数类——$K_r\{M_p\}$广义函数与(D_L)广义函数的结构. 这些内容初读时可以略去. 最后简述周期分布的一些初等知识. 由于分布的傅里叶变换理论的重要性，我们将它放在第四章一并讨论.

§1　基本空间$\mathscr{D}$(或K)

1. 空间$\mathscr{D}$(或K)的拓扑

我们用$x \triangleq (x_1, \cdots, x_n)$表示实$n$维欧氏空间$\mathbf{R}^n$内的变点，用$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$表示$x$的范数. 对$\alpha \triangleq (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，我们取$D^\alpha =$

$D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，这里 $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$，而 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$（在应用中 $|x|$ 与 $|\alpha|$ 不会混淆），记 $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$. 我们用 C^m 表示 $(0\leqslant m\leqslant\infty)$ 在 R^n 内 m 次连续可微的复值函数类（如 $m=\infty$，则各阶 $<\infty$；$m=0$ 时为连续函数类），而用 C_0^m 表示具紧支集的相应函数所组成的函数类.

定义 1.1 若序列 $\{\varphi_j\}\subset C_0^\infty$ 满足下列条件：

(1) 存在有界集 N 包含一切 φ_j 的支集；

(2) 对于每个 α, $D^\alpha\varphi_j(x)\longrightarrow 0$ $(j\to\infty)$ 对于 x 一致成立；

则称序列 $\{\varphi_j\}$ 在 K 内**收敛**于 0 .

设 $\Omega=\{\Omega_0\triangleq\varnothing,\Omega_1,\Omega_2,\cdots\}$,

$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\}$,

$\{m\}=\{m_0,m_1,m_2,\cdots\}$,

这里 $\varnothing$ 表示空集，$\Omega_j=\{x\,|\,|x|<j\}$，$\{\varepsilon_i\}$ 是单调递减趋于零的实数列，$\{m_i\}$ 是单调增加趋于 ∞ 的非负整数列. 记零点的邻域为：

$$V(\{m\},\{\varepsilon\})=\{\varphi\mid\varphi\in C_0^\infty,\text{当}|\alpha|\leqslant m_j,\ x\,\overline{\in}\,\Omega_j\text{时},$$
$$|D^\alpha\varphi(x)|<\varepsilon_j,\ j=0,1,2,\cdots\}. \tag{1.1}$$

取一切 $V(\{m\},\{\varepsilon\})$ 的集作为 C_0^∞ 的邻域基，则线性空间 C_0^∞ 成为拓扑线性空间（事实上是局部凸空间）. 它显然是基本空间，类似这种具有拓扑的基本空间仍记为 K 或 $\mathscr{D}$.

定理 1.1 序列 $\{\varphi_j\}\subset C_0^\infty$ 收敛于 0 的充要条件是它依 K 的拓扑收敛于 0，即存在有界集 B，使 φ_j 在 B 外恒为 0，而且除有限多项外，一切 $\varphi_j\in V(\{m\},\{\varepsilon\})$.

证： 必要性. 设 $\varphi_j\longrightarrow 0$ $(j\to\infty)$，则 φ_j 的支集 $\mathrm{supp}\varphi_j$ 位于某个 Ω_k 内，而且在 Ω_k 内每个序列 $\{D^\alpha\varphi_j\}$ 一致收敛于 0 . 因此给定任意邻域 $V(\{m\},\{\varepsilon\})$，当 j 充分大时，有 $\varphi_j\in V(\{m\},\{\varepsilon\})$.

充分性. 设 φ_j 依 K 的拓扑收敛于零，则 φ_j 的支集必位于某个有界集内. 事实上，若不然，则必有子序列 $\{j_m\}$ 和 $\{i_m\}$ 及对某个 $|x^m|$

$>i_m$时有$\varphi_{j_m}(x^m)\neq 0$，这里i_m单调增加趋于∞. 用$\varepsilon_m=\frac{1}{2}|\varphi_{j_m}(x)|$ $(m=0,1,2,\cdots)$定义$V(\{m\},\{\varepsilon\})$，余下的ε与m可以任意选择. 显然对于子序列$i=j_m$, $\varphi_i\notin V(\{m\},\{\varepsilon\})$，这同$\{\varphi_j\}$依$K$的拓扑收敛于零的假设矛盾. 序列$\{D^\alpha\varphi_j(x)\}$对任意$\alpha$都一致收敛于零可以从下列事实推出：取邻域$V(\{m\},\{\varepsilon\})$，使这里$m_0=|\alpha|$，而且$\varepsilon_0$任意小，于是对充分大的$j$，$\varphi_j$属于每个这种邻域内. □

记(D_G)为一切支集在G内的$\varphi\in\mathscr{D}$的集合. 若N是欧氏空间R^n内的紧集，在(D_N)内我们引进由$\mathscr{D}$诱导的拓扑. 容易看出，(D_N)内的一个邻域基由

$$V(m,\varepsilon,N)\triangleq\{\varphi\mid\varphi\in(D_N),\text{当}|\alpha|\leqslant m,\ x\in N\text{时}|D^\alpha\varphi(x)|<\varepsilon\}\tag{1.2}$$

给定. 由第一章例6.1知(D_N)是完全空间.

设N是空间R^n内的紧集，$\{M\}\triangleq\{M_0,M_1,M_2,\cdots\}$是单调增加的正整数序列，记

$$B(\{M\},N)=\{\varphi\mid\varphi\in(D_N),\text{当}|\alpha|\leqslant j,x\in\mathrm{R}^n\text{时},\ |D^\alpha\varphi(x)|\leqslant M_j,\ j=0,1,2,\cdots\}.\tag{1.3}$$

定理1.2 集$W\in K$是有界集的充要条件是它包含于某个$B(\{M\},N)$内，即W内一切φ的支集位于某个紧集N内，而且对每个α，集$\{D^\alpha\varphi\mid\varphi\in W\}$是一致有界的.

证： 回忆拓扑线性空间$\mathscr{D}$内的集合W称为有界集：若对于零点的任意邻域V，存在实数$\lambda>0$，使得$W\subset\lambda V$. 易知每个$B(\{M\},N)$是有界集. 因此，若W包含于这样的集内，则它是有界集.

反之，设W是有界集，我们要证明W的每个元素φ的支集必包含于某个有界集内. 事实上，若不然，必存在序列$\{\varphi_j\}\subset W$，$\{x^j\}\subset\mathrm{R}^n$，使得$\varphi_j(x^j)\neq 0$，而且$|x_j|\geqslant j$. 选择$\varepsilon_j=|\varphi_j(x^j)|/j$和任意的$\{m\}$，则对任意的$\lambda>0$，$W$不能包含于$\lambda V(\{m\},\{\varepsilon\})$内，这同$W$

的有界性假设矛盾，从而我们证明了对某个紧集N，有$W\subset(D_N)$.当正数δ充分小时，因为δW在$\mathscr{D}$内包含于零点的任意邻域内，集$\{D^\alpha\varphi \mid \varphi\in W\}$一致有界，设界于$M_\alpha$，于是$W\subset B(\{M\},N)$，这里$M_m=\max\limits_{|\alpha|\leqslant m}M_\alpha$. □

2. 空间(D^k)

空间C_0^k能由引进邻域系

$$V(\{m\},\{\varepsilon\})\equiv V(\{\varepsilon\},\{m\})=\{h,h,h,\cdots\}$$

而拓扑化，得到的拓扑线性空间记为(D^k). 如定理1.1一样，$\{\varphi_j\}$在(D^k)内收敛于零的充要条件是：它们的支集是一致有界的，而且对于$|\alpha|\leqslant k$，$D^\alpha\varphi_j$关于$x\in\mathrm{R}^n$一致收敛于零. (D_G^m)与(D_N^m)(N是紧集)的拓扑可类似于(D_G)与(D_N)的拓扑定义.

§2 单位分解

单位分解在研究广义函数的局部性质，特别是对于从局部到全体的总合问题时，常常成为有效的辅助手段.

定理2.1 对任意的$\varepsilon>0$，必存在函数$\rho_\varepsilon\in\mathscr{D}$，满足下列条件：

(1) 当$|x|<\varepsilon$时，$\rho_\varepsilon(x)>0$；

(2) 当$|x|\geqslant\varepsilon$时，$\rho_\varepsilon(x)=0$；

(3) $\int_{\mathrm{R}^n}\rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1$.

证：令

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{\varepsilon^n}\exp\left(\dfrac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right), & |x|<\varepsilon\\ 0, & |x|\geqslant\varepsilon\end{cases}\tag{2.1}$$

这里n为空间R^n的维数，k为由下式决定的一个常数：

$$k\int_{|x|\leq 1}\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)dx=1,$$

则不难直接证明 $\rho_\varepsilon(x)$ 满足定理结论要求. □

注：这样定义的函数 $\rho_\varepsilon(x)$ 称为半径为 ε 的球形函数. 它是一个很有效的工具，利用它可以作出空间 $\mathscr{D}$ 内的一系列函数.

定理2.2 设 A 是 R^n 内的集合，B 是包含 A 的开集，则存在 C^∞ 函数 β 具有如下性质：

(1) β 的支集位于 B 内；

(2) 若 $x\in A$，则 $\beta(x)=1$；

(3) 对一切 x，都有 $0\leqslant\beta(x)\leqslant 1$.

证： 设 G 为有界开集而且使得 $A\subset G\subset\bar{G}\subset B$，$\chi_G(x)$ 为 G 的特征函数. 若 ε 充分小，令

$$\beta_\varepsilon(x)=\int_{\mathrm{R}^n}\chi_G(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy, \tag{2.2}$$

则 $\beta_\varepsilon(x)$ 满足定理结论要求. □

定义2.1 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$，集族 $\{U_i\}_{i\in I}$ 与 $\{\Omega_i\}_{i\in J}$ 都是 Ω 的覆盖. 若对于每一个 $i\in I$，存在 $j\in J$，使得 $U_i\subset\Omega_j$，则称覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ **从属于覆盖** $\{\Omega_i\}_{i\in J}$. 若覆盖集 Ω 的集族 $\{U_i\}_{i\in I}$ 都是开(闭)集，且 Ω 内每一个紧集至少和一个、至多和有限多个集 $\{U_i\}(i\in I)$ 相交，则称 $\{U_i\}_{i\in I}$ 为集 Ω 的**局部有限开(闭)覆盖**.

定义2.2 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$，$\Gamma=\{\Omega_i\}$ 是 Ω 的可列覆盖. 若函数族 $\{\alpha_i\}$ 满足下列条件：

(1) $\alpha_i\in C^\infty$，且 $\mathrm{supp}\,\alpha_i\subset\Omega_i$；

(2) $\alpha_i\geqslant 0$，而且对于每一个 $x\in\Omega$，都有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(x)=1$；

(3) 对于每一个紧集 $N\subset\Omega$，N 仅同有限多个 α_i 的支集相交；

则称函数族$\{\alpha_i\}$为 Ω 的**单位分解**，准确地说，是从属于Γ的局部有限的单位分解.

定理 2.3（单位分解定理） 若Ω是开集，Γ是Ω的开覆盖，则Ω必有单位分解.

证：设 S 是Ω的可数稠密子集，令闭球

$$B_i=\{x \mid x\in \mathrm{R}^n, \rho(p_i,x)\leqslant r_i, p_i\in S,\ r_i \text{ 是有理数}\},\quad i=1,2,\cdots$$

则$\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$，于是存在诸紧子集$K_i$构成的一个序列$\{K_i\}$，使得

(1) $K_i\subset K_{i+1}$，$i=1,2,\cdots$；

(2) $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}K_i$；

(3) 每个K_i都包含于 K_{i+1}的内部 $K^{\circ}{}_{i+1}$内.

令$V_i=K^{\circ}{}_{i+1}\setminus K_{i-2}$，而且$W_i=K_i\setminus K^{\circ}{}_{i-1}$，其中$K_0=K_1=\varnothing$，于是$V_i$是开集，$W_i$是紧集，且$\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}W_i$. 对任意的 $x\in W_i$，取开集$V(x,i)\in\Gamma$，使得$x\in V(x,i)\subset V_i$. 由 W_i 的紧性，存在有限点集$\{x_1,x_2,\cdots,x_{n_i}\}$，使得$W_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}V(x_j,i)$. 由于$\Omega$ 的任意紧子集都仅与有限个开集 V_i 相交，所以诸开集$V(x_j,i)$（$i=1,2,\cdots$；$1\leqslant j\leqslant n_i$）组成的族是$\Omega$的一个从属于$\Gamma$的局部有限的开覆盖，记为$\{V_i\}$. 由定理 2.2 知存在函数$\psi_i\in C^{\infty}$满足：

(1) $0\leqslant\psi_i(x)\leqslant1$；

(2) $x\in V_i$ 时，$\psi_i(x)=1$；

(3) $x\notin B_i$ 时，$\psi_i(x)=0$.

归纳地定义：

$\alpha_1 = \psi_1$,

………

$$\alpha_{i+1} = (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_i)\psi_{i+1}. \quad (i \geqslant 1) \tag{2.3}$$

显然，在B_i之外，$\alpha_i = 0$，于是定义 2.2 的(1)成立，而且关系式

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_i = 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_i) \tag{2.4}$$

在 $i=1$ 时显然成立. 若 (2.4) 式对某一个 i 成立，将 (2.3) 与 (2.4)相加得(2.4)对于 $i+1$ 成立.由数学归纳法知(2.4) 对每一个自然数 i 成立. 因为在V_i 内 $\psi_i(x)=1$，从而

$$x \in \bigcup_{i=1}^{m} V_i \text{时}, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) = 1,$$

于是定义2.2的(2) 也成立.若K是紧集,则存在m，使$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i$，于是定义 2.2 的(3)也成立.]

系 空间$\mathscr{D}$在空间(D^m)内稠密.

证： 对任意$\varphi \in (D^m)$，定义

$$\varphi_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\rho_\delta(x-y)\mathrm{d}y, \tag{2.5}$$

则 $\varphi_\delta \in C_0^\infty$而且当 $m=0$ 时

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) - \varphi_\delta(x) \\
&= \int_{|x-y|<\delta} \varphi(x)\rho_\delta(x-y)\mathrm{d}y \\
&\quad - \int_{|x-y|<\delta} \varphi(y)\rho_\delta(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{|x-y|<\delta} [\varphi(x)-\varphi(y)]\rho_\delta(x-y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

当$m=0$时，因为 $\varphi(x)$是 x 的连续函数，所以在任意固定的有界域内，对于充分小的 δ，可以使得当 $|x-y|<\delta$ 时，$|\varphi(x)-\varphi(y)| < \varepsilon$. 于是取定 δ 后即得

$$|\varphi(x)-\varphi_\delta(x)|\leqslant\varepsilon\int_{|x-y|<\delta}\rho_\delta(x-y)\mathrm{d}y=\varepsilon.$$

即 $\delta\longrightarrow 0$ 时 $\varphi_\delta(x)\longrightarrow\varphi(x)$ 在任意有界域内一致成立. 同理可证一般情形. □

注：设 (α_i) 是从属于 Γ 的局部有限的单位分解，则对于任意基本函数 $\varphi(x)$，我们有

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x)\alpha_i(x). \tag{2.6}$$

令 $\varphi_i(x)=\varphi(x)\alpha_i(x)$，则 $\varphi_i(x)$ 是在 Γ 的某元素外为 0 的基本函数，而且(2.6)式右边的项数有限. 还要注意，如果 $\nu\longrightarrow\infty$ 时 $\varphi_\nu(x)$ 在空间 $\mathscr{D}$ 内趋于零，则每一序列 $\varphi_i(x)=\varphi_\nu(x)\alpha_i(x)$ 当 $\nu\longrightarrow\infty$ 时在空间 $\mathscr{D}$ 内也趋于零.

§3 分布的定义与简单性质

1. 分布的概念

定义 3.1 $\mathscr{D}((D^m))$ 的共轭空间记为 $\mathscr{D}'$ 或 $\mathscr{D}^*$ $((D^m)'$ 或 $(D^m)^*)$，称 $\mathscr{D}'$ 的元素为**分布**，即分布是 $\mathscr{D}$ 上的连续线性泛函. 分布 T 作用于 $\varphi\in\mathscr{D}$ 时记为 $T(\varphi)$ 或 $T\cdot\varphi$.

定义 3.2 $\mathscr{D}'$ 的一个**弱拓扑**由零点的下列邻域基给定：

$$\begin{aligned}&V(\varphi_1,\cdots,\varphi_m;\varepsilon)\\&=\{T\mid|T(\varphi_1)|<\varepsilon,\ |T(\varphi_2)|<\varepsilon,\cdots,|T(\varphi_m)|<\varepsilon\}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

定义 3.3 若对任意 $\varphi\in\mathscr{D}$ 时，$T_j(\varphi)\longrightarrow 0$，则称序列 $\{T_j\}\subset\mathscr{D}'$ **弱收敛**于 0.

定义 3.4 若对于 $\mathscr{D}$ 内的任意有界集，一致地有 $T_j(\varphi)\longrightarrow 0$，则称序列 $\{T_j\}\subset\mathscr{D}'$ **强收敛**于 0，或简称为收敛于0，记为 $T_j\longrightarrow 0$.

注意，若 B 是$\mathscr{D}$的有界子集，则由义定，对零点的任意邻域 V 和充分大的实数 $\lambda>0$，有 $B\subset\lambda V$. 因为 T 是连续的，$\mathscr{D}$内必有零点的邻域 V，使得 $\{T(\varphi)|\varphi\in V\}$ 是有界集，从而若 $T\in\mathscr{D}'$，则对任意有界集 B，

$$T(B)\triangleq\sup_{\varphi\in B}|T(\varphi)| \tag{3.2}$$

是有限的. 反之也真(见下面定理 3.3). 于是我们又能给出 $T_j\longrightarrow 0$ 的充要条件是：对任意有界集 B，$T_j(B)\longrightarrow 0\ (j\to\infty)$.

定义 3.5 $\mathscr{D}'$的一个拓扑(**强拓扑**)由定义 $\mathscr{D}'$ 内零点的邻域基 $V(B,\varepsilon)$ 给定，这里 B 是$\mathscr{D}$的任意有界子集，$\varepsilon>0$，而

$$V(B,\varepsilon)\triangleq\{T\mid T\in\mathscr{D}',T(B)<\varepsilon\}. \tag{3.3}$$

注：将来，当我们涉及$\mathscr{D}'$的拓扑时，除特别声明外，将理解为是由 $V(B,\varepsilon)$所定义的(强)拓扑. 显然，当且仅当依 $\mathscr{D}'$的拓扑 $T_j\longrightarrow 0$ 时，才有 $T_j\longrightarrow 0$. 又 $B'\subset\mathscr{D}'$ 是有界集的充要条件是：对任意有界集 B，总有

$$B'(B)\triangleq\sup_{T\in B'}T(B)<\infty. \tag{3.4}$$

强(弱)拓扑的上述定义与第一章的一般术语一致.

下列定理揭露了$\mathscr{D}'$与(D_N)的关系.

定理 3.1 凸集 W 是$\mathscr{D}$内零点的邻域的充要条件是：对任意紧集 $N\subset\mathbb{R}^n$，W 与(D_N)的交集是(D_N)内零点的凸邻域.

换句话说，空间$\mathscr{D}$是空间(D_N)的归纳极限.

证：必要性. $\mathscr{D}$内零点的任意邻域 W 必包含某一个 $V(\{m\},\{\varepsilon\})$，而 $V(\{m\},\{\varepsilon\})$ 与每一个(D_N)的交显然包含在 (D_N) 内零点的某一个邻域内. 再由 W 的凸性即可证明.

充分性. 设$\mathscr{D}$内凸集 W 与每一个(D_N)的交集是 (D_N)内零点的邻域，令

$$N=\{x||x|\leqslant h+2\}. \tag{3.5}$$

我们的目的是证明对任意 $h\geqslant 0$，存在整数 $m_h\geqslant 0$ 和正数 η_h，使

得若 $\varphi\in\mathscr{D}$的支集位于 N 内，而且

$$|D^\beta\varphi(x)|\leqslant\eta_n \ (\text{当}|\beta|\leqslant m_n), \tag{3.6}$$

则 $\varphi\in W$. 不失一般性，可取 m_n 单调增加趋于∞.

由单位分解定理知存在 C^∞ 函数 $\alpha_n\geqslant 0$，使得 $\Sigma\alpha_n=1$，而且 α_n 的支集位于紧集$\{x \mid n\leqslant|x|\leqslant n+2\}$内，于是由定理 2.2 的注，每一个 $\varphi\in\mathscr{D}$，能写为形式

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(2^{n+1}\alpha_n\varphi). \tag{3.7}$$

因为W 是凸的，所以若 $2^{n+1}\alpha_n\varphi\in W$ 对每个 n成立，则也有$\varphi\in W$，于是只要证明 $2^{n+1}\alpha_n\varphi\in W$ 即可.

若对于$|\beta|\leqslant m_n$, $|x|\geqslant n$ 时有 $|D^\beta\varphi(x)|\leqslant\varepsilon_n$, 则对于一切 $x\in\mathbf{R}^n$ 有

$$|2^{n+1}D^\beta(\alpha_n\varphi)|\leqslant k_n\varepsilon_n,$$

这里 k_n 是与 $\varphi\in\mathscr{D}$和 ε_n 无关的常数. 因此，若我们取单调减少趋于零的序列$\{\varepsilon_n\}$而且满足 $k_n\varepsilon_n<\eta_n$，则 $\varphi\in V(\{m\},\{\varepsilon\})$时，由(3.6)知 $2^{n+1}\alpha_n\varphi\in W$.再由(3.7)知 $\varphi\in W$，于是W 是$\mathscr{D}$内零点的邻域. □

系 1 空间$\mathscr{D}$是空间$(D_{N_m})\equiv K(m)\,(m=1,2,\cdots)$ 的严格归纳极限，这里

$$N_m=\{x \mid |x_i|\leqslant m, i=1,2,\cdots,n\}.$$

于是$\mathscr{D}$是第二章 § 1 开始所讲的基本空间.

系 2 $\mathscr{D}$是完备空间.

证：因为(D_{N_m})是完备的，而且 $\mathscr{D}$是 (D_{N_m}) 的归纳极限，再由第一章定理 7.4 得到证明. □

下列定理在证明$\mathscr{D}$上线性泛函的连续性时是有用的.

定理3.2 $\mathscr{D}$上的线性泛函T 连续的充要条件是：对任意紧集 N，T 在(D_N)上的限制是连续的.

这是第一章定理 7.1 的特例，因而证明略去. 由第一章的定

理4.2及定理4.3能将定理3.2改写如下：

定理3.3 $\mathscr{D}$ 上的线性泛函 T 连续的充要条件是：对任意有界集 $B\subset\mathscr{D}$，$T(B)<\infty$.

由第一章的定理4.4知定理3.3等价于下列定理：

定理3.4 $\mathscr{D}$ 上的线性泛函 T 连续的充要条件是：$\varphi_m\longrightarrow 0\ (\mathscr{D})$ 时，$T(\varphi_m)\longrightarrow 0$.

证明略.

注：定理3.1～定理3.4对空间 (D^m) 也成立.

设 $L_N^p(1\leqslant p<\infty)$ 是在紧集 N 上定义的 p 幂可积的可测函数集合. 若我们定义范数

$$\|f\|_{p,N}=\left(\int_N|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 L_N^p 是巴拿赫空间. 设 L_N^∞ 是在 N 上一切本性有界可测函数的集合，定义范数

$$\|f\|_{\infty,N}=\operatorname*{essen\,sup}_{x\in N}|f(x)|,$$

则 L_N^∞ 也是巴拿赫空间. 由于函数型 $\mathscr{D}$ 广义函数与局部可积函数能构成一一对应，于是可得下列简单而且实用的定理：

定理3.5 若对任意紧集 N，局部可积函数列 $\{f_j\}$ 在 L^1_N 内收敛于0，则分布序列 $f_j\longrightarrow 0\ (\mathscr{D}')$.

证： 任取有界集 $B\subset\mathscr{D}$，由定理1.2可知，B 包含于某个 $B(\{M\},N)$ 内，因此

$$f_j(B)=\sup_{\varphi\in B}|f_j(\varphi)|=\sup_{\varphi\in B}\left|\int_N f_j(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant M_0\int_N|f_j(x)|\mathrm{d}x=M_0\|f_j\|_{1,N}\longrightarrow 0.\ (j\longrightarrow\infty)\qquad\square$$

下面，我们证明空间 $\mathscr{D}'$ 的一个重要性质——完备性.

定理3.6 设 $\{f_m\}\subset\mathscr{D}'$，而且对于每个 $\varphi\in\mathscr{D}$，$\lim\limits_{m\to\infty}(f_m,\varphi)$ 存在，则必有 $f\in\mathscr{D}'$ 使得 $f_m\longrightarrow f(\mathscr{D}')$,

证：令$(f,\varphi)=\lim\limits_{m\to\infty}(f_m,\varphi)$. 我们证明$f\in\mathscr{D}'$. 由于

$$
\begin{aligned}
(f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)&=\lim_{m\to\infty}(f_m,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)\\
&=\lim_{m\to\infty}[(f_m,\alpha_1\varphi_1)+(f_m,\alpha_2\varphi_2)]\\
&=\alpha_1(f,\varphi_1)+\alpha_2(f,\varphi_2),
\end{aligned}
$$

因此f是空间$\mathscr{D}$上的线性泛函. 下面来证明f的连续性，即证明$\varphi_m\longrightarrow 0\ (\mathscr{D})$时，必有$(f,\varphi_m)\longrightarrow 0$. 用反证法，若不然，必有常数$C>0$和$\{\varphi_m\}$的子序列(不妨仍记为$\{\varphi_m\}$)，使得$|(f,\varphi_m)|\geqslant C>0$. 由$\mathscr{D}$中的收敛性定义知$D^k\varphi_m(x)$在$\mathrm{R}^n$中一致收敛于0. 只要再取其子序列，我们还可假定$|D^k\varphi_m(x)|\leqslant 1/4^m$ ($k=0,1,\cdots,m$).

今取$\psi_m=2^m\varphi_m$，则$\psi_m\longrightarrow 0\ (\mathscr{D})$. 但是

$$
|(f,\psi_m)|=|2^m(f,\varphi_m)|\geqslant 2^mC\longrightarrow\infty\ (m\to\infty),
$$

于是由这两个关系式，我们可取$\{f_m\}$及$\{\psi_m\}$的子序列，然后推出矛盾.

在$\{\psi_m\}$中先取ψ_{m_1}，使得$|(f,\psi_{m_1})|>1$.

由于$(f_m,\varphi)\longrightarrow(f,\ \varphi)$，我们可取$\{f_m\}$中的某一元$f_{m_1}$，使得$|(f_{m_1},\varphi_{m_1})|>1,\cdots$. 设已选出$f_{m_j}$及$\psi_{m_j}(j=1,2,\cdots,n-1$，且$m_1<m_2<\cdots<m_{n-1})$，则取$\{\psi_m\}$中相当大的下标，使得

$$
|(f_{m_k},\psi_{m_n})|<\frac{1}{2^{n-k}},\quad k=0,1,\cdots,n-1 \tag{3.8}
$$

$$
|(f,\psi_{m_n})|>\sum_{j=1}^{n-1}|(f,\psi_{m_j})|+n \tag{3.9}
$$

成立的元素作为ψ_{m_n} (由于对任意的分布f_0，都有$(f_0,\psi_m)\longrightarrow 0\ (\mathscr{D}')$，所以(3.8)式是可能的. 又由于$(f,\psi_m)\to\infty$，所以(3.9)式也是可能的). 于是能从序列$\{f_m\}$中取$\{f_{m_n}\}$，使得

$$
|(f_{m_n},\psi_{m_n})|>\sum_{j=1}^{n-1}|(f_{m_n},\psi_{m_j})|+n. \tag{3.9$'$}
$$

如此继续下去，可得子序列$\{\psi_{m_n}\}$及$\{f_{m_n}\}$．令$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{m_n}$（这里$\psi$是$\mathscr{D}$中右边部分和序列的极限），于是$\psi\in\mathscr{D}$．又

$$(f_{m_n},\psi)=\sum_{j=1}^{n-1}(f_{m_n},\psi_{m_j})+(f_{m_n},\psi_{m_n})+\sum_{j=n+1}^{\infty}(f_{m_n},\psi_{m_j}),$$

但是从(3.9)′及

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|(f_{m_n},\psi_{m_j})|<\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{j-n}}=1$$

得$|(f_{m_n},\psi)|>n-1$，于是当$n\longrightarrow\infty$时，必有$(f_{m_n},\psi)\longrightarrow\infty$，这和数列$(f_{m_n},\varphi)$的极限存在相矛盾．故$f$连续，从而有$f\in\mathscr{D}'$． □

2.正分布与正测度

在第二章中已知测度是广义函数的特例，现在讨论正分布与正测度的关系．若对任意实的$\varphi\in\mathscr{D}$，$T(\varphi)$总是实数，则称分布T是**实分布**．同样，若对$\mathscr{D}$内任意的$\varphi\geqslant 0$总有$T(\varphi)\geqslant 0$，则称分布T是**正分布**，记为$T\geqslant 0$．取

$$T_1(\varphi)=\mathrm{Re}T(\varphi),\quad T_2(\varphi)=\mathrm{Im}T(\varphi),$$

记$T=T_1+\mathrm{i}T_2$，这里T_1和T_2是实分布．若T是测度，则T_j $(j=1,2)$能分解为两个正测度之差(见参考文献50的定理21.2)；若T不是测度，由下面定理知T_j不具有这种分解．

定理3.7 正分布是正测度．

证： 我们只须证明T在$\mathscr{D}$上依D^0的拓扑连续．由于在定理3.2中以D^0代替$\mathscr{D}$时也成立，故我们只要证明对任意紧集N，T在(D_N)上依$(D^0{}_N)$的拓扑是连续的就够了．于是，给定$\varepsilon>0$，我们必须找出邻域

$$V=\{\varphi\mid\varphi\in(\mathscr{D}_N),|\varphi(x)|<\delta\},$$

使$\varphi\in V$时$|T(\varphi)|<\varepsilon$即可．设$\psi\in C_0^\infty$是在N上等于1的非负函

数(它的存在性由定理 3.2 推出)．令 $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$，而且注意对一切 x 有 $|\varphi(x)|<\delta\psi(x)$，即可得到

$$-\delta\psi<\varphi_1<\delta\psi,\quad -\delta\psi<\varphi_2<\delta\psi.$$

因为 $T\geqslant 0$，所以若 $\alpha\leqslant\beta$，则 $T(\alpha)\leqslant T(\beta)$．于是得

$$|T(\varphi_1)|\leqslant\delta T(\psi),\quad |T(\varphi_2)|\leqslant\delta T(\psi).$$

因此，假定 $2\delta T(\psi)<\varepsilon$，则对一切 $\varphi\in V$ 就有 $|T(\varphi)|<\varepsilon$． []

§4 局 部 分 布

1. **空间 (D_G)**

在§ 1 内已引入了 (D_G) 空间的概念，现在正式定义如下：

定义 4.1 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 内的开集．考察所有支集含于 G 内的基本函数之集，它们用通常的线性运算构成线性空间，记为 (D_G)．也可以用类似于定义 $\mathscr{D}$ 拓扑方法来定义它的拓扑如下：取

$$\Omega=\{\Omega_0\triangleq\varnothing,\Omega_1,\Omega_2,\cdots\},$$

这里 $\Omega_j\subset\Omega_{j+1}$，$\Omega_j\subset G(j=0,1,2,\cdots)$，而且 G 的每个紧子集都包含于某个 Ω_j 内，于是可以定义 (D_G) 内极限如下：设 $\{\varphi_j\}\subset(D_G)$，如果一切 φ_j 的支集都在 G 内的一个固定紧子集之内，而且各级导函数 $D^\alpha\varphi_j(x)$ 在 G 内都一致趋于 0，则称 φ_j 在 (D_G) 内趋于 0．赋予上述拓扑结构后，(D_G) 构成一个基本空间，仍记为 (D_G)，其共轭空间 (D'_G) 的元素称为**局部 (D_G) 分布**．

显然，若 $G_1\subset G_2$，则 $(D_{G_2})\subset(D_{G_1})$．由于定理 3.4 对于 (D_G) 的情形也成立，可知 $T\in(D'_G)$ 的充要条件是：$\varphi_m\longrightarrow 0\ (D_G)$ 时，$T(\varphi_m)\longrightarrow 0$．

注：同上面类似，也可以定义一般的**局部广义函数概念**．

相对于局部分布，前边所谈分布也称为**全局分布**．所有关于全局分布的概念、定义或运算等，除个别显然的例外（即牵涉到基本函数在全空间的性质时），都可以直接地或作应有的适当修改后

移植于局部分布，这里从略.

显然，每一个全局分布即是定义于$\mathscr{D}$上的连续线性泛函，当局限于子空间(D_G)上时，即为(D_G)上的分布. 反之，若干局部分布也可合并为一个全局分布.

定义 4.2 若对一切$\varphi\in(D_G)$，有$T(\varphi)=0$，则称T在开集G上等于0，于是当两个分布之差T_1-T_2在G上等于0时，有$T_1=T_2$.

2. 局部化原理

定理 4.1（局部化原理） 设开集组$\{\Omega_i\}$是开集G的可列覆盖，$\{T_i\}$是(D_{Ω_i})分布$(i=1,2,\cdots)$而且满足下列条件：若$\Omega_i\cap\Omega_j\neq\varnothing$，则在交集$\Omega_i\cap\Omega_j$上$T_i=T_j$，于是存在一个唯一的在$G$上定义的分布$T$，使得在每一个$\Omega_i$上，$T=T_i$.

证： 设$\{\alpha_i\}$是从属于$\{\Omega_i\}$的单位分解. 若$\varphi\in(D_G)$，则

$$\varphi=\sum_i\alpha_i\varphi \quad (x\in\mathbf{R}^n). \tag{4.1}$$

因为φ的支集仅和有限多个α_i的支集相交，(4.1)仅由有限多项组成，因此若T存在，则

$$T(\varphi)=\sum_i T(\alpha_i\varphi)=\sum_i T_i(\alpha_i\varphi). \tag{4.2}$$

这就证明了T的唯一性.

现在证明具有定理所需的T的存在性. 对于$\varphi\in(D_G)$，我们用(4.2)的右边定义$T(\varphi)$，只用证明T的连续性. 由定理3.2，只用证明对任意紧集$N\subset G$，T在(D_N)上的限制连续. 但是若$\varphi\in(D_N)$，级数$\sum_i T_i(\alpha_i\varphi)$仅由$\alpha_i$的支集与$N$相交的有限多项组成. 因为每一个$T_i$是连续的，所以$T$也是连续的.

余下来证明在Ω_i上$T=T_i$. 设$\varphi\in(D_{\Omega_i})$，$\alpha_j\varphi$的支集包含于$\Omega_i\cap\Omega_j$内，因此，若$\alpha_j\varphi\neq0$，则$\Omega_i\cap\Omega_j\neq\varnothing$. 由假设$T_i(\alpha_j\varphi)=$

$_j(\alpha_j\varphi)$，关于 i 相加，即得：

$$T_i(\varphi)=\sum_j T_i(\alpha_j\varphi)=\sum_j T_j(\alpha_j\varphi)=T(\varphi). \quad \square$$

系 (1) 若在每个开集 Ω_i 上 $T=0$，则在并集 $\Omega^*=\bigcup_i \Omega_i$ 上 $T=0$；

(2) 若在每个 Ω_i 上 $T\geqslant 0$，则在 Ω^* 上 $T\geqslant 0$；

(3) 若在每个 Ω_i 上序列 $T_m \longrightarrow 0$，则在 Ω^* 上 $T_m \longrightarrow 0$.

3. 分布的支集

定义 4.3 考察使 $T=0$ 的一切开集的并，由系之(1)，这个并是使 $T=0$ 的最大开集. 我们称这个集在 R^n 内的余集为分布 T 的**支集**，记为 $\operatorname{supp} T$.

这个定义与函数及测度的支集定义一致.

由定义可知 $x\in \operatorname{supp} T$ 的充要条件是：T 在点 x 的任意开邻域 U 上不为 0，即存在 $\varphi\in(\mathscr{D}_U)$，使 $(T,\varphi)\neq 0$.

定理 4.2 设分布 T 的支集与基本函数 φ 的支集不相交，则 $(T,\varphi)=0$. 特别，若 $\operatorname{supp} T=\varnothing$，则 $T\equiv 0$. 因此，如果在 T 的支集的一个开邻域上 $\varphi_1\equiv\varphi_2$，则 $(T,\varphi_1)=(T,\varphi_2)$.

证： 由支集定义可直接导出. $\square$

§5 分布的导数

1. 不连续函数的导数

第二章内我们已给出分布 T 的导数定义：

$$D_iT(\varphi)=-T(D_i\varphi), \tag{5.1}$$

$$D^\alpha T(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi), \tag{5.2}$$

这里 $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. 有时我

们也记 $T^{(\alpha)}$ 以代替 D^{α}. 对于连续可微函数 f，它的古典导函数也记为$[D_i f]$或$[D^{\alpha} f]$. 对于不连续函数，则 $D_i f$与$[D_i f]$不同.

定理 5.1 设(1) $\{x_j\}(j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为实直线R上的一组顺列的孤立点，而且 $\lim\limits_{j\to\pm\infty} x_j=\pm\infty$；

(2) $f(x)$在每个开区间(x_j,x_{j+1}) $(j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$上有 m 阶一致连续导数；

(3) 每个点 x_j 都是 $f(x)$ 及其 k 阶导函数 $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\cdots,m)$的第一种间断点，而且跃度

$$f^{(k)} \triangleq f^{(k)}(x_j+0)-f^{(k)}(x_j-0),$$

则
$$f^{(k)}=[f^{(k)}]+\sum_j f_j^{(k-1)}\cdot\delta_{(x_j)}$$

$$+\sum_j f_j^{(k-2)}\delta'_{(x_j)}+\cdots+\sum_j f_j^{(0)}\delta_{(x_j)}^{(k-1)}, \qquad (5.3)$$

这里 $\delta_{(x_j)}$ 是 δ 函数，$\delta_{(x_j)}(\varphi)=\varphi(x_j)$，而

$$\delta^{(q)}(\varphi)=(-1)^q\varphi^{(q)}(0).$$

证： 用数学归纳法证明. 当 $k=1$ 时，由分部积分法，有

$$\begin{aligned}
f'(\varphi)&=-f(\varphi')=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\\
&=-\sum_j\int_{x_j}^{x_{j+1}}f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\\
&=-\sum_j[f(x_{j+1}-0)\varphi(x_{j+1})-f(x_j+0)\varphi(x_j)]\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)[f'(x)]\mathrm{d}x\\
&=\sum_j[f(x_j+0)-f(x_j-0)]\varphi(x_j)\\
&\quad-\sum_j[f(x_{j+1}-0)\varphi(x_{j+1})-f(x_j-0)\varphi(x_j)]
\end{aligned}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)[f'(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_j f_j^{(0)}(\delta_{x_j},\varphi)+([f'],\varphi),$$

所以
$$f'=[f']+\sum_j f_j^{(0)}\delta_{(x_j)}.$$

设 $m>k\geqslant 1$ 时成立，即

$$f^{(k)}=[f^{(k)}]+\sum_j f_j^{(k-1)}\delta_{(x_j)}+\sum_j f_j^{(k-2)}\delta'_{(x_j)}+\cdots$$

$$+\sum_j f_j^{(0)}\delta_{(x_j)}^{(k-1)}.$$

对 $\varphi\in\mathscr{D}$，则 $\varphi'\in\mathscr{D}$，于是由归纳假设知

$$(f^{(k+1)},\varphi)=-(f^{(k)},\varphi')$$

$$=-\left([f^{(k)}]+\sum_j f_j^{(k-1)}\delta_{(x_j)}+\cdots+\sum_j f_j^{(0)}\delta_{(x_j)}^{(k-1)},\varphi'\right).$$

而
$$([f^{(k)}],\varphi')$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[f^{(k)}(x)]\,\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_j\int_{x_j}^{x_{j+1}}[f^{(k)}(x)]\,\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_j\left\{[f^{(k)}(x)]\varphi(x)\Big|_{x_j}^{x_{j+1}}\right.$$

$$\left.-\int_{x_j}^{x_{j+1}}[f^{(k+1)}(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$=-\sum_j\int_{x_j}^{x_{j+1}}[f^{(k+1)}(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$-\sum_j[f^{(k)}(x_{j+1}+0)-f^{(k)}(x_{j+1}-0)]\varphi(x_{j+1})$$

$$+\sum_j[f^{(k)}(x_{j+1}+0)\varphi(x_{j+1})-f^{(k)}(x_j+0)\varphi(x_j)].$$

类似前面,知第二个求和式中各项相消为 0 ,故

$$\begin{aligned}&([f^{(k)}],\varphi')\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}[f^{(k+1)}(x)]\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\left(\sum_j f_j^{(k)}\delta_{(x_j)},\varphi(x)\right)\\&=-\left([f^{(k+1)}]+\sum_j f_j^{(k)}\delta_{(x_j)},\varphi(x)\right),\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&(f^{(k+1)},\varphi)\\&=\left([f^{(k+1)}(x)]+\sum_j\left(f_j^{(k)}\delta_{(x_j)}+\sum_j f_j^{(k-1)}\delta'_{(x_j)}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\cdots+\sum_j f_j^{(0)}\delta^{(k)}_{(x_j)},\varphi\right)\right),\end{aligned}$$

即对一切自然数 k ,(5.3)式成立. □

由此可见,第一种不连续函数的广义导函数由两部分组成.第一部分就是函数的古典导函数,而第二部分是奇异广义函数,即 δ 函数及其广义导函数的线性组合. 这一部分表示函数的不连续性.

定理 5.2 设 G 是空间 $\mathbb{R}^n$ 内的闭域, 且有光滑边界 S , f 是 G 内的 m 阶一致连续而且可微的函数且在 G 外等于 0 , 而以边界 S 为间断面,并假定为第一种间断性,即沿 S 的切平面方向各级导函数都连续,沿 S 的法线方向由内向外各阶导函数都趋于定极限,则

$$D_i f(\varphi)=-\int_S\varphi(x)f(x)\cos(\nu,x_i)\,\mathrm{d}S+\int_G[D_if](x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

这里 ν 是 S 的外向法线,$\mathrm{d}S$ 是曲面元素.

证: 由导函数定义及格林(Green)公式,有

$$(D_i f)(\varphi) = -f\,(D_i\,\varphi) = -\int \underset{G}{\cdots} \int f(x) D_i\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int \underset{g}{\cdots} \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots \mathrm{d}x_n$$

$$+\int \underset{G}{\cdots} \int [D_i f](x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x_1\cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= -\int_s f(x)\varphi(x)\cos(\nu,\ x_i)\,\mathrm{d}S$$

$$+\int_G [D_i f](x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

系　设 $\boldsymbol{f}(x)$ 为 R^n 内的向量函数，$\boldsymbol{f}(x) \triangleq \{f_1(x),\ \cdots, f_n(x)\}$，这里 $f_k(x)$ 都是上述类型的间断函数. 令其相应的向量广义函数为$\{\boldsymbol{f}\}$，定义**散度**为：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f}(x) = \sum_{k=1}^{n} D_k f_k, \qquad \mathrm{div}[\boldsymbol{f}] = \sum_{k=1}^{n} [D_k f_k],$$

则由定理 5.2，有

$$-\int_G \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{grad}\,\varphi\,\mathrm{d}x = \int_G (\mathrm{div}\boldsymbol{f})\varphi\,\mathrm{d}x + \int_s \varphi \boldsymbol{f}\cdot \mathbf{d}S,$$

$$(\mathrm{div}[\boldsymbol{f}],\quad \varphi) = ([\,\mathrm{div}\boldsymbol{f}], \varphi) + \int_s \varphi\boldsymbol{f}\cdot \mathbf{d}S,$$

这里“·”表示向量的数积，$\mathrm{grad}\varphi$ 为梯度向量 $\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right\}$.

定理 5.2 及其推论表明：具有间断面的第一种不连续函数的广义导函数由两部分组成. 第一部分就是函数的古典导函数，而第二部分是一个载在间断曲面上的奇异测度，它具有面积密度 $f(x)\cos(\nu, x_i)$.

定理 5.3　设 Δ 表示调和微分算子，即 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$，$f$ 如定理 5.2，则

$$(\Delta[f],\varphi)=([\Delta f],\varphi)+\int_S \varphi\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_S f\frac{\partial \varphi}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

这里$\frac{\partial}{\partial n}$表示内向法线导数.

证: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}[f],\ \varphi\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[f],-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right],\ \varphi\right)-\int_S f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cos(\nu,\ x_i)\,\mathrm{d}S$$

$$=\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right],\ \varphi\right)+\int_S\frac{\partial f}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)\varphi\,\mathrm{d}S$$

$$-\int_S f(x)\cos(\nu,x_i)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}S,$$

所以 $([f],\Delta\varphi)=(\Delta[f],\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}[f],\ \varphi\right)$

$$=([\Delta f],\ \varphi)+\int_S\frac{\partial f}{\partial n}\varphi\,\mathrm{d}S-\int_S f\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S. \quad \square$$

如果用积分形式写出,即得格林公式如下:

$$\int_G f\Delta\varphi\,\mathrm{d}x-\int_G\varphi\Delta f\,\mathrm{d}S=\int_G\varphi\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_S f\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

这些结果说明场位论中的积分变换公式在某种意上表示不连续函数的广义导函数性质.

2.分布的阶

函数 $f\in C^m$ 的导函数是 C^{m-1} 类函数,这类函数也可以推广到分布,即有如下定义:

定义 5.1 若分布T对于$\mathscr{D}$具有(D^m)的拓扑时连续,则称T**不大于**m**阶**.因为$\mathscr{D}$是(D^m)的稠密子空间,所以T也能恒同于$(D^m)'$的元素.若T的阶不大于m,而不是不大于$m-1$,则称T是m**阶分布**.

测度是零阶分布，于是能断定：若分布 T 不大于 m 阶，则 D_iT（$i=1,2,\cdots,n$）不大于 $m-1$ 阶.

定理 5.4　对任意 α，当 $T\in\mathscr{D}$ 时算子 $D^\alpha T$ 是 $\mathscr{D}'$ 到 $\mathscr{D}'$ 的连续算子.

证：这是第二章定义 $D^\alpha T$ 时的结论，在这里我们给出独立的证明．回忆 $\mathscr{D}'$ 的拓扑由邻域组 $V(B,\varepsilon)$ 给定．现在，对任意有界集 $B\subset\mathscr{D}$，由公式

$$D^\alpha T(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi)$$

蕴涵 $DT\in V(B,\varepsilon)$ 的充要条件是 $T\in V(D^\alpha B,\varepsilon)$，这里 $D^\alpha B=\{D^\alpha\varphi\,|\varphi\in B\}$. 因为 $D^\alpha B$ 是有界集，由定理 1.2，$V(D^\alpha B,\varepsilon)$ 是 $\mathscr{D}'$ 内零点的邻域. □

系 1　若 $T_j\longrightarrow 0(\mathscr{D}')$，则 $D^\alpha T_j\longrightarrow 0(\mathscr{D}')$.

由定理 3.5 及系 1，得

系 2　若对任意紧集 $N\subset\mathrm{R}^n$，$f_j\longrightarrow 0(L_N^1)$ 而且 $L\triangleq\Sigma a_\alpha D$，这里 a_α 是常数，和 Σ 仅由有限多项组成，则 $Lf_j\longrightarrow 0(\mathscr{D}')$.

定义 5.2　设 $h\in\mathrm{R}^n$，**平移** τ_h 是由下式定义的运算：

$$\tau_h f(x)=f(x+h)\quad(f\text{ 是函数}),$$

$$\tau_h T(\varphi)=T(\tau_{-h}\varphi)\quad(T\text{ 是分布}).$$

由定理 3.4 容易看出 $\tau_h T$ 是分布.

定理 5.5　若 $h=(0,\cdots,0,h_k,0,\cdots,0)$，则当 $h\longrightarrow 0$ 时，

$$\frac{\tau_h T-T}{h_k}\longrightarrow\frac{\partial T}{\partial x_k}\,(\mathscr{D}').$$

证：令

$$S_h=\frac{\partial T}{\partial x_k}-\frac{\tau_h T-T}{h_k},\quad \psi_h=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\tau_{-h}\varphi-\varphi}{h_k},$$

则 $S_h(\varphi)=T(\psi_h)$. 对任意有界集 $B\subset\mathscr{D}$，令

$$B_h=\{\psi_h\mid\varphi\in B\},$$

则 $S_h(B)=T(B_h)$. 从定理 1.2 给出的有界集的特征性质得

$$|D^\alpha\psi| \leqslant M_\alpha(h) \quad (\psi \in B_h),$$

这里当 $h \longrightarrow 0$ 时 $M_\alpha(h) \longrightarrow 0$, $\psi \in B_h$ 的支集被包含于一个与 h 无关的有界集内，这里不妨取 $|h| \leqslant 1$. 因此，给定 $\mathscr{D}$ 内零点的任意邻域 $V(\{m\}, \{\varepsilon\})$，若 $|h|$ 充分地小，则 B_h 属于此邻域. 因为，对于任意 $h>0$，存在邻域 $V=V(\{m\},\{\varepsilon\})$，使 $T(V)<\eta$. 若 $|h|$ 充分地小，则有 $T(B_h)<\eta$，因此又有 $S_h(B)<\eta$，于是证明了：当 $h \longrightarrow 0$ 时 $S_h(B) \longrightarrow 0$. 这里 B 是 $\mathscr{D}$ 内任意有界集，即 $S_h \longrightarrow 0$ $(\mathscr{D}')$. □

由定理 5.5，映射 $h \longrightarrow \tau_h T$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathscr{D}'$ 内的连续映射.

第二章定理 5.3 这里也成立，证明从略.

§6 分布的积分

1. 一元分布的原分布与不定积分

对广义函数定义了导函数及乘子运算后自然引起逆运算——积分与除法问题. 更一般地，也引起解广义函数的微分方程问题. 本节先来讨论分布的积分.

定义 6.1 设 S 为已知 Φ 广义函数. 若对于某个 i，$D_iT=S$，则称 T 为 S 对自变量 x_i 的一个**原 Φ 广义函数**. 原 Φ 广义函数的一般形式称为 S 的**不定积分**. 特别，若 $\Phi=\mathscr{D}$，则称为**原分布**. 我们从一元广义函数开始.

定理 6.1 每一个一元分布(即 $\mathscr{D}$ 广义函数)有无限多个原分布. 它们彼此相差一个常数.[①]

证：先证若原分布存在，则必有无限多个，且其差为常数. 事实上，若 S 的原分布 T 存在，则对一切 $\psi \in \mathscr{D}$，有

$$T\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) = -S(\psi). \tag{6.1}$$

① 此处常数意即函数型广义函数，其产生函数为一常数，今后同此.

设H是由满足条件$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(t)\,\mathrm{d}t=0$的一切函数$\xi$组成的$\mathscr{D}$的子空间. 若$\xi\in H$,则它的定积分

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{x}\xi(t)\,\mathrm{d}t$$

有紧支集. 反之亦然,而且$\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=\xi$. 因$\xi$无穷可微,故$\psi$也无穷可微,所以$\psi\in\mathscr{D}$. 取定一个$\beta\in\mathscr{D}$,满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(t)\,\mathrm{d}t=1, \tag{6.2}$$

则任意$\psi\in\mathscr{D}$能分解为形式$\psi=\lambda\beta(x)+\xi(x)$,这里

$$\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6.3}$$

而且$\xi=\varphi-\lambda\beta\in H$. 注意当$\lambda\neq0$时,$\lambda\beta\notin H$.

设序列$\varphi_j\longrightarrow0\ (\mathscr{D})$,则易知对应的数列$\lambda_j\longrightarrow0$,而且函数序列$\xi_j=\varphi_j-\beta\lambda_j=\dfrac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}x}\longrightarrow0(\mathscr{D})$, $\psi_j\longrightarrow0(\mathscr{D})$.

若S的原分布T存在,则对任一$\varphi\in\mathscr{D}$,由(6.1)得

$$\begin{aligned}T(\varphi)&=\lambda T(\beta)+T(\xi)=\lambda T(\beta)+T\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\\&=\lambda T(\beta)-S(\psi).\end{aligned} \tag{6.4}$$

若T_1和T_2是S的两个原分布,则由(6.4)得

$$T_1(\varphi)-T_2(\varphi)=\lambda C=\int_{-\infty}^{+\infty}C\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

这里$C=T_1(\beta)-T_2(\beta)$.因此T_1-T_2是常数C.

为了证明原分布T的存在,我们定义

$$T_0(\varphi)=\gamma\lambda-S(\psi)\quad(\varphi\in\mathscr{D}),$$

这里γ是常数,而λ由(6.3)式定义. 又T_0是线性泛函,为了证明T也是连续的,只用证明T_0在有界集$B\in\mathscr{D}$内有界即可. 若φ

在有界集 B 内变化，λ 在有界复数集 N 内变化，因此 $\xi=\varphi-\lambda\beta$ 也在 $\mathscr{D}$ 的有界集内变化，于是 ξ 的定积分 φ 将在 $\mathscr{D}$ 的有界集 B_1 内（ψ 的支集包含于任意包含 ξ 的支集的区间内）．因为 $S(B_1)<\infty$，由(6.4)知 $T(B)<\infty$． □

系 设 S 为已知的一元分布，则存在无穷多个分布 T 满足 $D^\alpha T=S$．它们彼此相差一个次数 $\leqslant\alpha-1$ 的多项式．[1]

证： 存在性可由定理 6.1 推出．第二部分只用证明：设 $D^\alpha T=0$，则 T 为次数 $\leqslant\alpha-1$ 的多项式．用归纳法证之．

若 $DT=0$，则 $T=C$（常数）；若 $D^2T=0$，则 $DT=C$．此方程的一个解是 $T=Cx$．由定理 6.1 知 $T=Cx+C_1$．若 $D^\alpha T=0$，即 $(D^{\alpha-1}T)=C_1$，由归纳假设

$$D^{\alpha-1}T=C_1=D^{\alpha-1}(Cx^{\alpha-1}).$$

于是 $T-Cx^{-1}$ 为次数 $\leqslant\alpha-2$ 的多项式，所以 T 为次数不大于 $\alpha-1$ 的多项式． □

2. 多元分布

现在转向多元分布情形．

定理 6.2 设 S 为已知分布，则有无限多个分布 T，满足

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=S, \tag{6.5}$$

而且它们之间相差一个与变数 x_1 无关的分布．

证： 设 H_1 是满足等式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi_1(t_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t_1=0 \tag{6.6}$$

的函数 ξ_1 所组成的 $\mathscr{D}$ 的子空间．若 $\xi_1\in H_1$，则它的定积分

$$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\xi(t_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t_1 \tag{6.7}$$

① 此处多项式意即函数型广义函数，其产生函数为一多项式，今后同此．

属于$\mathscr{D}$，而且$\xi_1=\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}$.取定一个仅依赖于$x_1$的基本函数$\beta(x_1)$，且$\beta\in H_1$，满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(t_1)\mathrm{d}t_1=1,\tag{6.8}$$

则任意$\varphi\in\mathscr{D}$能分解为形式

$$\varphi(x)=\lambda_1(x_2,\cdots,x_n)\beta(x_1)+\xi_1(x_1),\tag{6.9}$$

这里
$$\lambda_1(x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t_1,$$

而且$\xi_1=\varphi-\lambda_1\beta\in H_1$.

若T存在，则

$$\begin{aligned}T(\varphi)&=T(\lambda_1(x_2,\cdots,x_n)\beta)+T(\xi_1)\\&=T(\lambda_1\beta)+T\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)=T(\lambda_1\beta)-\left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)\psi_1\\&=T(\lambda_1\beta)-(S,\psi).\end{aligned}\tag{6.10}$$

任取空间$(x_2,\cdots,x_n)$上的分布V，我们定义分布T_0如下：

$$(T_0,\varphi)=(V,\lambda_1)-(S,\psi_1),$$

于是不难验证$(T_0,\lambda_1\beta)=(V,\lambda_1)$是$(x_2,\cdots,x_n)$上的分布，因此$T_0$满足(6.10)，即$\dfrac{\partial T}{\partial x_1}=S$. □

T的连续性及T的一般表示可仿定理6.1证明.

3.分布的一阶微分方程组

上述定理可推广至简单的一阶微分方程组的情形.

定理6.3 设$S_1,S_2,\cdots,S_k(k\leqslant n)$为已知分布，则方程组

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i}=S_i\quad(i=1,2,\cdots,k)\tag{6.11}$$

有解的充要条件为

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_j}=\frac{\partial S_j}{\partial x_i}\quad(i,j=1,2,\cdots,k),\tag{6.12}$$

而且如果有解，则必有无穷多个解，它们互相差一个与变数 $x_1,\cdots,x_k$ 无关的分布，即形如 $U(\varphi)=\sum_k(\lambda_k)$，这里 $\sum_k$ 是 $\mathscr{D}_{x_{k+1},\cdots,x_n}$ 上的任意分布，而

$$\lambda_k(x_{k+1},\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1,\cdots t_k,x_{k+1},\cdots,x_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k. \qquad (6.13)$$

证：必要性显然．充分性用归纳法来证．

$k=1$ 时，定理 6.2 已经证明．假定 (6.11) 的前 $k+1$ 个方程有解 T_1，对任意 $S_1,\cdots,S_k$ 满足(6.12)，而且一般解 T 是：

$$T(\varphi)=T_1(\varphi)+\sum_{k-1}(\lambda_{k-1}), \qquad (6.14)$$

这里 $\sum_{k-1}$ 是 $\mathscr{D}_{x_k,\cdots,x_n}$ 上的任意分布．于是(6.11)的最后一个方程变为

$$\frac{\partial\sum_{k-1}(\lambda_{k-1})}{\partial x_k}=S_k(\varphi)-\frac{\partial T_1(\varphi)}{\partial x_k}. \qquad (6.15)$$

因为对任意的 $i<k$，总有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(S_k-\frac{\partial T_1}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial S_k}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial T_1}{\partial x_k}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(S_i-\frac{\partial T_1}{\partial x_i}\right)=0,$$

由归纳假设有

$$S_k(\varphi)-\frac{\partial T_1(\varphi)}{\partial x_k}=\sum_{k-1}^{0}(\lambda_{k-1}),$$

这里 $\sum_{k-1}^{0}$ 是空间 $\mathscr{D}_{x_k,\cdots,x_n}$ 上的某个分布，代入(6.15)式得

$$\frac{\partial \sum_{k-1}(\lambda_{k-1})}{\partial x_k} = \sum_{k-1}^{0}(\lambda_{k-1}).$$

此方程的一般解为：

$$\sum_{k-1}(\lambda_{k-1}) = \sum_{k-1}^{1}(\lambda_{k-1}) + \sum_{k}(\lambda_k), \tag{6.16}$$

这里$\sum\limits_{k-1}^{1}$是特解，把(6.16)式代入(6.14)式即可. □

若 $k=n$，则 (6.11) 的任意两个解的差是一个常数，于是得：

系 若分布T的一切m阶导函数$D_i^m T=0$，则T是次数$<m$的多项式.

证： 用归纳法. 当 $m=1$ 时，结果显然成立. 设当 $m=k$ 时成立，求证对 $m=k+1$ 时也成立. 设T的所有 $k+1$ 阶导函数都为 0，则$\frac{\partial T}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$的各 k 阶导函数为0，即$\frac{\partial T}{\partial x_i}=C_i$($C_i$为 x_i 的次数小于 k 的多项式). 因$\frac{\partial C_i}{\partial x_k}=\frac{\partial C_k}{\partial x_i}(i,k=1,\cdots,n)$，依归纳法假设，有次数$\leqslant k$的多项式$p$，使得$\frac{\partial p}{\partial x_i}=C_i$，故$\frac{\partial}{\partial x_i}(T-p)=0(i=1,\cdots,n)$，即$T=p+C$. □

§7 分布的除法

设Φ为基本空间，A为已知的Φ乘子，B为已知的Φ广义函数，于是可以考虑乘积方程

$$AT=B. \tag{7.1}$$

这里T为未知的Φ广义函数. 解乘积方程的问题自然也可以称为

除法问题.由于广义函数的乘法问题现在尚未解决,因此除法问题也仅在少数简单的情形(例如以解析函数除分布)的讨论才比较成熟,一般情形考虑较少.

我们只讨论分布的除法.

定理 7.1 设 B 为已知分布,函数 $A(x)$ 为乘子而且在空间 $\mathbf{R}^n$ 内无零点,则方程(7.1)有唯一的解 $T=\frac{1}{A}B$.

证: 因 $A(x)$ 无零点,所以 $\frac{1}{A(x)}$ 仍为乘子,故 $T=\frac{1}{A}B$ 仍为分布,它显然是(7.1)的解. 要证解的唯一性,就是要证方程 $AT=0$ 只有零解. 事实上,若 $AT=0$, 即对任意 $\psi\in\mathscr{D}$, $(T, A\psi)=0$, 因 $A(x)$ 无零点, 所以每一个 $\psi\in\mathscr{D}$ 必可写为 $\varphi=A\psi$, 即 $(T,\varphi)=0$, 从而 $T=0$. □

由此可见,问题在于 $A(x)$ 有零点时的除法.

如果对于任意的分布 B,方程 $AT=B$ 有解,则称乘子 $A(x)$ 为**可除乘子**. 如果在空间 (D_G) 内方程 $AT=B$ 有解, 则称乘子 $A(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的开集 G 上为**局部可除**的.

注: 乘积方程可以无解. 例如取 A 具有紧支集, 而 B 无紧支集,则 $AT=B$ 无解.

定理 7.2 设乘子 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 均为可除,则其乘积亦可除.

证: 将除法连续运用 k 次即可. □

定理 7.3 设 $\{\Omega_i\}$ 为空间 $\mathbf{R}^n$ 的局部有限开覆盖. 若乘子 $A(x)$ 在每一个 Ω_i 上为局部可除的,则 A 为(全局)可除的.

证: 设 B 为已知分布,于是根据定理 4.1 的证明过程, B 可以分解为级数 $\sum_i B_i$, B_i 的支集包含在 Ω_i 内. 由假设存在分布 T_i, 使得在 Ω_i 内 $AT_i=B_i$. 我们不妨假定 T_i 的支集也包含于 Ω_i 内(否则可取函数 $\alpha_i\in D_{\Omega_i}$. 在 B_i 的支集的一个邻域内, $\alpha_i(x)=1$, 取 $\alpha_i T_i$ 代替 T_i). 命 $T=\sum_i T_i$, 由于(Ω_i)为局部有限开覆盖, 所以

和为有限项. □

定理7.4 设分布T为乘积方程$AT=0$的解，则T的支集必含在函数$A(x)$的零点集(即由方程$A(x)=0$确定的曲面)内.

证明略.

我们只讨论一元分布的除法，多元的情形见文献6,46和47.

定理7.5 设B为已知分布，则方程:

$$xT=B \tag{7.2}$$

有无穷多个解，它们相差一个函数$C\delta$，C为任意复常数，δ为δ函数.

证: 令

$$H=\{\xi \mid \xi(x)=x\psi(x), \psi\in\mathscr{D}\}, \tag{7.3}$$

则H为空间$\mathscr{D}$的子空间，$\xi\in H$的充要条件是$\xi(0)=0$.

必要性显然，今证充分性. 定义函数

$$\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{\xi(x)}{x}, & x\neq 0\\ \xi'(0), & x=0\end{cases}$$

当$x=0$时，ψ为无穷可微. 又因为$\xi(0)=0$，所以

$$\psi(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\xi(x)-\xi(0)}{x}=\xi'(0),$$

故$x=0$为连续点. 又易证

$$\psi^{(p)}(0)=\frac{\xi^{(p+1)}(0)}{p+1}=\lim_{x\to 0}\psi^{(p)}(x),$$

因此函数$\psi(x)$在$x=0$点无穷可微. 又显然$\psi(x)$有紧支集，所以$\psi\in\mathscr{D}$，$\xi=x\psi\in H$.

取定函数$\beta\in\mathscr{D}$，而$\beta\bar{\in}H$，而且$\beta(0)=1$(由于$\beta\bar{\in}H$，所以这样的β存在)，于是$\mathscr{D}$中任意函数φ可唯一地分解为:

$$\varphi(x)=\varphi(0)\beta(x)+\xi(x), \tag{7.4}$$

这里$\xi\in H$，$\xi=x\psi$，$\psi\in\mathscr{D}$.

设序列$\varphi_j\to 0(\mathscr{D})$，则$\varphi_j(0)\to 0$，于是$\xi_j\triangleq\varphi_j-\varphi_j(0)\beta\to$

$0(\mathscr{D})$. 但 $\psi(x)=\dfrac{\xi(x)}{x}$,由泰勒公式知

$$|D^p\psi(x)|\leqslant k_p \max_{|t|\leqslant|x|}|D^{p+1}\xi(t)|,$$

因此序列 $\psi_j\to 0(\mathscr{D})$.

设 T 为任意分布, $\varphi\in\mathscr{D}$,则

$$\begin{aligned}(T,\varphi)&=\varphi(0)(T,\beta)+(T,x\psi)\\&=\varphi(0)(T,\beta)+(xT,\psi),\end{aligned}\tag{7.5}$$

因此 T 满足方程 $xT=B$ 的充要条件为:对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}$,有

$$(T,\varphi)=\varphi(0)(T,\beta)+(B,\psi).\tag{7.6}$$

今任取常数 C,定义分布 T_0 如下:

$$(T_0,\varphi)=\varphi(0)C+(B,\psi),\ \forall\,\varphi\in\mathscr{D}.\tag{7.7}$$

于是 $(T_0,\beta)=C$. 因此 T_0 满足(7.6),即 $xT_0=B$.

设 $xT=0$,则

$$(T,\varphi)=\varphi(0)(T,\beta)=C(\delta,\varphi),$$

这里常数 $C=(T,\beta)$. 因此方程 $xT=B$ 的通解 T 可表示为

$$T_1+C\delta.\quad\square$$

定理 7.6 设 B 为已知一元分布,则方程

$$x^mT=B\tag{7.8}$$

有无穷多个解. 它们中间之差,即方程

$$x^mT=0\tag{7.9}$$

的通解为 $\sum\limits_{p=0}^{m-1}C_pD^p\delta$, 这里 C_p 为复常数.

证: 由前定理连除 m 次即得解 T. 第二部分用归纳法证明. $m=1$ 时已证. 设对 $m=k$ 时成立,今设 $x^{k+1}T=0$, 即 $x^k(xT)=0$, 于是由归纳假设,有

$$xT=\sum_{p=0}^{k-1}A_pD^p\delta.\tag{7.10}$$

由第二章§6的(6.24)式知

$$T_1=\sum_{p=0}^{k-1}(-1)\frac{A_p}{p+1}D^{p+1}\delta$$

是方程(7.10)的一个解. 因此

$$T=T_1+C\delta=\sum_{p=0}^{m}C_pD^p\delta. \qquad \square$$

定理 7.7 设 B 为已知分布, $A(x)$ 为乘子, 且 $A(x)$ 具有孤立的有限阶零点, 则方程 $AT=B$ 有无穷多个解,它们之差, 即方程 $AS=0$ 的通解为

$$S=\sum_{\nu}\sum_{p=0}^{m_\nu-1}C_{p,\nu}D^p\delta_{(a_\nu)}, \tag{7.11}$$

这里 a_ν 为 $A(x)$ 的 m_ν 阶零点, $\nu=1,2,\cdots$.

证: 取相当小的互不相交的开集 $\{\Omega_\nu\}$,使 $a_\nu\in\Omega_\nu$,而且在 Ω_ν 内有

$$A(x)=(x-a_\nu)^{m_\nu}\beta_\nu(x),\quad x\in\Omega_\nu. \tag{7.12}$$

这里 $\beta_\nu(x)$ 为集 Ω_ν 内无零点的无穷可微函数, $\nu=1,2,\cdots$.

依定理 7.2 得知在 $\Omega_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ 内 $A(x)$ 为局部可除. 另取开集 Ω_0,使 $a_\nu\bar{\in}\bar{\Omega}_0(\nu=1,2,\cdots)$ 而且 $\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\Omega_\nu=\mathbb{R}^n$. 函数 $A(x)$ 在集 Ω_0 内无零点,因此局部可除. 故由定理 7.3 知 A 为可除的.

今求方程 $AS=0$ 的通解. 由于 $A(x)$ 在 Ω_0 内无零点,故在其内 $S_0=0$ 是解,在域 $\Omega_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ 内其通解为

$$S_\nu=\sum_{p=0}^{m_\nu-1}C_{p,\nu}D^p\delta_{(a_\nu)}. \tag{7.13}$$

因此在 $\mathbb{R}^n$ 内通解为 $T=\sum_{\nu}S_\nu=\sum_{\nu}\sum_{p=0}^{m_\nu-1}C_{p,\nu}D^p\delta_{(a_\nu)}$. $\square$

注：若 $A(x)$ 有无穷阶零点，则 $A(x)$ 未必可除．例如：

$$A(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

则 $A^{(p)}(0)=0$ $(p=1,2,\cdots)$．此时方程 $AT=\delta$ 无解．否则，解 T 必为以原点为支集的广义函数．将来可以证明（见定理 8．10 的系），(T,φ) 之值仅依赖于 φ 在零点的有限个导数之值，取 $\varphi(0)\neq 0$，于是

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0)=(AT,\varphi)=(T,A\varphi)=0,$$

矛盾．

关于除法的进一步讨论参看参考文献 6．

§8　分布的结构

1．有界开集上分布的表示

第二章 §9 讨论了 $K\{M_p\}$ 广义函数的结构．下边将会发现，对于分布而言具有较强的结论．在定义 5.1 内我们曾给出有限阶广义函数概念，它也可叙述如下：

设 m 为非负整数．如果 $\varphi_j\in\mathscr{D}$，$\varphi_j\to 0(D^m)$ 时，$(T,\varphi_j)\to 0$，则称分布 T 具有**有限阶**，其阶数 $\leqslant m$．

定理 8.1　分布 T 可以（唯一地）延拓为一个 (D^m) 广义函数的充要条件是 T 的阶数 $\leqslant m$．

证： 因 $\mathscr{D}$ 在 (D^m) 内稠密，而且 $\varphi_j\to 0(\mathscr{D})$ 蕴函 $\varphi_j\to 0(D^m)$，故每个 (D^m) 广义函数都可视为阶数 $\leqslant m$ 的分布．反之，设分布 T 的阶数 $\leqslant m$，则 T 按 (D^m) 在 $\mathscr{D}$ 上诱导的极限定义连续，而 $\mathscr{D}$ 为 (D^m) 的稠密子空间，故 T 可以唯一地延拓为 (D^m) 上的连续线性泛函．□

注：由此定理知阶数 $\leqslant m$ 的分布可以与 (D^m) 广义函数看作相同．

我们先研究有界开集 Ω 上的分布由函数的导函数表示问题，然后再延拓到空间 R^n 上去. 为了后面需要，先给出下列定理：

定理 8.2　设 T 是分布，N 是 R^n 内的紧集，则存在整数 $m\geqslant 0$，使得当 $\varphi_j\in(D_N)$ 而且所有 $D^\alpha\varphi_j(x)(|\alpha|\leqslant m)$ 在 R^n 内都一致收敛于 0 时，必有 $(T,\varphi_j)\to 0$.

证：因 T 是 (D_N) 上的连续泛函，所以对于任意 $\varepsilon>0$，存在 (D_N) 内零点的邻域 $V(m,\eta,N)$，使 $\varphi\in V(m,\eta,N)$ 时，$|(T,\varphi)|\leqslant\varepsilon$. 又因 T 是线性的，故对任意 $\lambda>0$，$\varphi\in V(m,\eta\lambda,N)$ 时，$|(T,\varphi)|\leqslant\lambda\varepsilon$. 取定 ε 后，取 λ 充分小即可. □

定理 8.3　设 T 是分布，Ω 是 R^n 内的有界开集，则存在连续函数 f 和自然数 p，使得在 Ω 上 $T=D^pf$，而且可取连续函数 f 使其支集含在 Ω 的任意开邻域内.

证：为方便计，我们用符号 $\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}$ 表示 $\dfrac{\partial^{mn}}{\partial x_1^m\cdots\partial x_n^m}$. 因 Ω 有界，取 $N=\bar{\Omega}$，由定理 8.2 的证明知存在整数 $m\geqslant 0$ 和 $\eta>0$，使得当 $\varphi\in(D_N)$ 而且当 $|D^p\varphi|\leqslant\eta(|p|\leqslant m)$ 时，

$$|(T,\varphi)|\leqslant\varepsilon. \tag{8.1}$$

设 $\varphi\in(D_N)$，于是有

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_1,\cdots,x_k,\cdots x_n)\mathrm{d}x_k. \tag{8.2}$$

取实数 $\rho\geqslant 1$ 而且大于集 Ω 的直径，于是若 $\varphi\in(D_N)$，而且当

$$\int_{\mathrm{R}^n}\left|\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\eta}{\rho^{mn}} \tag{8.2$'$}$$

时，$\left|\dfrac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}\right|\leqslant\dfrac{\eta}{\rho^{mn}}$，从而 $|D^p\varphi(x)|\leqslant\eta\ (|p|\leqslant m)$. 由此知 $|(T,\varphi)|\leqslant\varepsilon$，于是 $\varphi_j\in(D_N)$，$\dfrac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\to 0(L^1(N))$（即 $\dfrac{\partial^{m+1}\varphi_j}{\partial x^{m+1}}$ 局部可积且在 N

上平均收敛于 0)时，$(T,\varphi_j)\to 0$. 现考虑 $L^1(N)$的线性子空间

$$(\Delta)\triangleq\left\{\psi\ \middle|\ \psi=\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\in L^1(N),\varphi\in(D_N)\right\},$$

则映射 $\varphi\mapsto\psi$ 把空间(D_N)一一地映成(Δ)（因为对 φ 逐次微分唯一地决定 ψ，而对 ψ 逐次如(8.2)式积分，唯一地决定 φ）. 我们定义(Δ)上的线性泛函如下：

$$(L,\psi)=(T,\varphi),\qquad\left(\psi=\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right)\tag{8.3}$$

则L是(Δ)作为$L^1(N)$的子空间上的连续线性泛函. 事实上，因(8.2)′蕴涵

$$|(L,\psi)|=|(T,\varphi)|\leqslant\varepsilon,$$

于是

$$|(L,\psi)|\leqslant\frac{\varepsilon\rho^{mn}}{n}\|\psi\|_{1,N}.\tag{8.4}$$

由哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理，L能保范地延拓为$L^1(N)$上的连续线性泛函，仍记为L，于是存在一个定义在N上的有界可测函数 $h(x)$，使得

$$\begin{aligned}(T,\varphi)=(L,\psi)&=\int_N h(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_N h(x)\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\mathrm{d}x=\left(h,\ \frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right).\quad\varphi\in(D_N)\end{aligned}\tag{8.5}$$

即

$$T=(-1)^{(m+1)n}\frac{\partial^{m+1}h}{\partial x^{m+1}}.\tag{8.6}$$

作 h 的原函数 f：

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}h(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.\tag{8.7}$$

它显然为 R^n 上的连续函数，但其支集一般地不是紧的．将 f 视为分布，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^n f}{\partial x_1\cdots\partial x_n}=h.$$

于是在开集 Ω 内，有

$$T=(-1)^{(m+1)}\frac{\partial^{m+2}f}{\partial x^{m+2}}. \tag{8.8}$$

设 Ω' 为闭集 $\bar{\Omega}$ 的任意的有界开邻域，取 $\alpha\in(D_\Omega)$，并且在闭集 $\bar{\Omega}$ 上 $\alpha(x)\equiv 1$，于是可取 αf 代替 f．而 αf 的支集在开邻域 Ω' 之内． ▯

注意，这个定理中的连续函数 f 在 Ω 上显然不是唯一的．事实上，加一个满足 $\frac{\partial^{m+2}}{\partial x^{m+2}}g=0$ 的函数 g 后仍得同样结果．

这个定理表明任意有界集上的局部分布都是某连续函数的广义导函数．由此可见，广义函数理论本质上只是把微分的概念推广了．而所有的广义函数在局部的意义上都是由连续函数经过广义微分而得到的．也可以从这里揭示的构造观点为起点而建立广义函数的理论，见参考文献例如 45．

系 设 Ω 是有界开集，则(D_Ω)上的每个分布都是有限阶的．

下面讨论分布的相同表示．

定理 8.4 若 B' 是分布的有界集，Ω 是 R^n 内的有界集，则存在 $p\in N$，使得对任意 $T\in B'$，在 Ω 上有 $T=D^p f$．这里$\{f\}$是连续且一致有界的函数族，它们的支集包含于 $\bar{\Omega}$ 的任意给定的开邻域内．

定理 8.5 设 $T_j\to 0\,(\mathscr{D}')$，Ω 是 R^n 内有界开集，则存在 $p\in N$，使得对每个 j，在 Ω 上有 $T_j=D^p f_j$，这里$\{f_j\}$是在 $\bar{\Omega}$ 的任意给定邻域外为 0 的连续函数列，而且在 R^n 内 $f_j(x)$一致收敛于 0．

反之可从定理 5.4 的系 2 得出．

这两个定理的证明依赖于下面定理：

定理 8.6 设 B' 是 $\mathscr{D}'$ 内的有界集，则对任意紧集 N，在 (D_N) 内存在零点的邻域 V，使得

$$B'(V) \triangleq \sup_{T\in B'} T(V) < \infty.$$

此定理是第一章定理 5.3 的特例，因为 (D_N) 满足第一可列公理.

定理 8.4 之证：逐字重复地应用定理 8.3 之证，其中 m,η,ε 对应于定理 8.6 的邻域 V，于是得到与 B' 内的 T 无关的具 ε,ρ,η 的(8.4)式．由哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理知 L 的范数不变，因此

$$\text{essen sup}|h(x)| = \|L\| \leqslant A_0,$$

这里 A_0 与 $T\in B'$ 无关.

定理 8.5 之证：因 $T_j \to 0$，$\{T_j\}$ 是 $\mathscr{D}'$ 内有界集，于是存在与 j 无关的 m,η,ε，使

$$|D^\alpha \varphi_j| < \eta \quad (|\alpha| \leqslant m)$$

时 $|T_j(\varphi)| \leqslant \varepsilon$．在定理 8.3 的证明中考虑 $(\varDelta)$ 作为 L_N^2 的子空间，因 $\|f\|_{1,N} \leqslant C\|f\|_{2,N}$，这里 C 是常数，由(8.4)式得

$$|L_j(\psi)| \leqslant A_1\|\psi\|_{2,N} \quad (\psi\in\varDelta). \tag{8.9}$$

这里 A_1 是与 j 无关的常数．于是能把每个 L_j 连续延拓到 $(\bar{\varDelta})$ 上．设 $(\varGamma)$ 是 $(\varDelta)$ 在 L_N^2 内的正交余集，现在定义 $L_j(\psi) = 0$（当 $\psi\in(\varGamma)$ 时），则线性地延拓 L_j 到空间 L_N^2 上，仍用 L_j 表示．于是如(8.5)有

$$L_j(\psi) = \int_N h_j(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \psi\in L_N^2.$$

由此得

(1) $\|h_j\|_{2,N} \leqslant A_1$；

(2) 对任意 $\psi\in L_N^2$，$\int_N h_j(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \to 0$，

考虑函数

$$k_x(\xi)=\begin{cases}1, & \xi_i\leqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)\text{且}\xi\in N\\ 0, & \text{其它处}\end{cases}$$

因 $k_x(\xi)\in L_N^2$(当 x 固定时),取 $x\bar{\in}N$ 时 $h_j(x)=0$,再由(2)得

$$g_j(x)=\int_{-\infty}^{x}h_j(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_N k_x(\xi)h_j(\xi)\mathrm{d}\xi\to 0\ (j\to\infty).$$

由(1),序列$\{g_i\}$是等度连续的而且关于 x,g_j 一致收敛于 0.

如定理 8.3,取 $f_j=(-1)^{(n+1)n}\alpha g_j$ 即得定理之证. □

注: 定理 8.3 的证明中若以 L_N^2 代替 L_N^1 也能证明,但证明定理 8.5 时却不行.

2. 空间 R^n 上分布的结构

先从具紧支集的分布开始.

定理 8.7 设 T 是具紧支集 N_0 的分布,则存在整数 $m\geqslant 0$ 使得若 $\psi_j\in C^\infty$,而且对于$|\alpha|\leqslant m$, $D^\alpha\varphi_j\to 0$ 在 N_0 的某个邻域内一致成立时,$T(\varphi_j)\to 0\ (j\to\infty)$.

证: 假定 φ_j 的支集与 T 的支集在 N_0 内相交,令 $\alpha\in\mathscr{D}$,而且 α 在 N_0 的某邻域内等于 1,定义分布.

$$T(\varphi)=T(\alpha\varphi).\tag{8.10}$$

此定义与 α 的选取无关. 事实上,若 β 是另一个满足上述条件的函数,则 $\alpha-\beta$ 的支集不与 T 的支集相交,因此

$$T(\alpha\varphi)-T(\beta\varphi)=T((\alpha-\beta)\varphi)=0.$$

因 $D(T\varphi)=-T(D\varphi)$,于是定义(8.10)与 $\varphi\in\mathscr{D}$ 时 $T(\varphi)$ 的定义一致. 应用定理 8.2,用 $\alpha\varphi_j$ 代替 φ_j,即得到证明. □

定理 8.8 任意具紧支集 N_0的分布 T 都能表示为形式

$$T=\sum_{q\leqslant p}D^qG_q,\tag{8.11}$$

这里 G_q 是在 N_0 的任意给定的邻域 U 外为 0 的连续函数.

证: 设 Ω 是有界开集并且满足 $N_0\subset\Omega\subset\bar{\Omega}\subset U$. 由定理 8.3,

$T=D^p f$ 在 (D_Ω) 内成立，即若 $\varphi\in(D_\Omega)$，则

$$T(\varphi)=(-1)^{|p|}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)D^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (8.12)$$

而且 f 是支集位于 Ω 的某邻域内的连续函数.

令 $\varphi\in\mathscr{D}$，$\alpha\in\mathscr{D}$ 且 α 在 Ω 内 N_0 的某邻域上等于 1，则

$$T(\varphi)=T(\alpha\varphi)=(-1)^{|p|}\int_{\mathbf{R}^n} fD^p(\varphi\alpha)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.13)$$

由莱布尼兹公式

$$D^p(\alpha\varphi)=\sum_{q\leqslant p}\binom{p}{q}D^{p-q}\alpha D^q\varphi,$$

得
$$T(\varphi)=(-1)^{|p|}\sum_{q\leqslant p}\int_{\mathbf{R}^n}\left[\binom{p}{q}fD^{p-q}\alpha\right]D^q\varphi\,\mathrm{d}x. \qquad (8.14)$$

因此 $T=\sum\limits_{q\leqslant p}D^qG_q$，这里 $G_q=(-1)^{|p+q|}\binom{p}{q}fD^{p-q}\alpha$，$G_q$ 的支集位于 U 内. □

定理 8.8 证明了下列事实：若 $T\in\mathscr{D}'$ 且具有紧支集，则它是有限阶的，即它能由 $\leqslant m$ 阶的导数 D^q 来表示. 更严格的有：

定理 8.9 若 T 是具有紧支集 N_0 的分布而且阶数 $\leqslant m$，则

$$T=\sum_{|q|\leqslant m}D^q\mu_q, \qquad (8.15)$$

这里 μ_q 是测度，它的支集包含于 N_0 的任意给定的邻域内. 反之是平凡的.

证： 证明类似于第二章定理 9.1. 设 Ω 是开集，使得 $N_0\subset\Omega\subset\bar{\Omega}\subset U$. 对每个 $\varphi\in\mathscr{D}$，对应于长为 ν 的向量 $\{\varphi_q\}=\{D^q\varphi\}$ $(|q|\leqslant m)$. 这种对应 $\varphi\mapsto\{\varphi_q\}$ 是一对一的. 令 Δ^ν 表示线性空间 Γ^ν 的子空间，它由长为 ν 且在 $\bar{\Omega}$ 上连续的一切向量函数 $\{\varphi_q\}$ 组成. Γ^ν 取通常的上确界范数. 在 Δ^ν 上定义泛函

$$L(\{\varphi_q\}) = T(\varphi), \tag{8.16}$$

则由于T的阶不大于m，所以它是连续的．由哈恩-巴拿赫线性泛函延拓定理，L能保范地延拓到Γ^{*}上．由黎斯定理知：

$$L(\{\varphi_q\}) = \sum_{|q|\leqslant m} \nu_q(\varphi_q) = \sum_{|q|\leqslant m} \nu_q(D^q\varphi), \tag{8.17}$$

这里ν_q是测度，其支集在Ω内．

令$\mu_q = (-1)^{|q|} = \nu_q$，则

$$T(\varphi) = \sum_{|q|\leqslant m} D^q\mu_q(\varphi). \quad \square$$

由(8.10)不难推出：若T的阶不大于m，而且$D^\alpha\varphi_j \to 0$对一切$|\alpha|\leqslant m$关于$x\in\Omega$一致成立(这里Ω是N_0的某邻域)，则$T(\varphi_j)\to 0$．一般说来Ω不能用N_0代替，然而对某种集合N_0，例如凸集，下列结论成立：存在$m' \triangleq m'(m, N_0)$，使得：若$D^\alpha\varphi_j\to 0$在N_0上一致成立($|\alpha|\leqslant m'$)，则$T(\varphi_j)\to 0$．由此，下列定理是有意义的：

定理8.10　若T是具紧支集N_0的分布，而且阶$\leqslant m$，则对任意$\varphi\in\mathscr{D}$，在N_0上对一切$|\alpha|\leqslant m$都有$D^\alpha\varphi = 0$时有$T(\varphi) = 0$．

换句话说，φ与其前m阶导函数在N_0上的值，唯一地决定$T(\varphi)$．

证：令

$$V_d = \{x \mid x\in \mathrm{R}^n, \rho(x, N_0)\leqslant d\}, \tag{8.18}$$

这里$\rho(x, N_0)$表示集N_0与点x的距离．因为φ的一切m阶方向导函数(即$\Delta_1\varphi, \cdots, \Delta_m\varphi$，这里$\Delta_i$是方向导数)在$N_0$上为0，故它们的绝对值在$V_d$内小于任意给定的$\eta > 0$，这里假定$d$充分地小．

对任意$x\in V_d$，$x\in N_0$，设σ是连接x到N_0内的点的长度$\leqslant d$的线段，则对任意$m-1$阶方向导函数简记为D^{m-1}，即

$$D^{m-1}\varphi(x)=\int_{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}D^{m-1}\varphi(\xi_{\sigma})\,\mathrm{d}\sigma, \tag{8.19}$$

这里 ξ_σ 关于 σ 变化而 $\dfrac{\partial}{\partial\sigma}$ 是方向 σ 的导函数．于是得到不等式 $|D^{m-1}\varphi(x)|\leqslant\eta d$．逐步地用此法作下去即得：

$$|D^{p}\varphi(x)|\leqslant d^{m-|p|}\eta \quad (x\in V_d). \tag{8.20}$$

这里D^p 表示任意$|p|$阶方向导函数，也表示为$D^p\varphi=D_1^{p_1}\cdots D_n^{p_n}\varphi$.

为了使用 $T(\varphi)=T(\alpha\varphi)$，我们选取某个 $\alpha\in\mathscr{D}$，使 α 在 N_0 的某邻域内等于 1，记之为 $\alpha=\alpha_d$．令 β_d 是 $V_{2d/3}$ 的特征函数，而 ρ_ε 是由(2.1)确定的球形函数，取

$$\alpha_d(x)=\int_{\mathrm{R}^n}\beta_d(y)\,\rho_{d/4}(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{8.21}$$

显然 $\alpha_d\in\mathscr{D}$，$0\leqslant\alpha_d\leqslant 1$，而且

$$\alpha_d(x)\leqslant\begin{cases}1, & x\in V_{d/4}\\ 0, & x\in V_d\end{cases}$$

因为$|D^p\rho_\varepsilon(x)|\leqslant A_p\varepsilon^{-|p|}$($A_p$ 为常数)，所以

$$|D^p\alpha_d(x)|\leqslant B_p d^{-|p|}\quad (B_p \text{ 为常数}). \tag{8.22}$$

由莱布尼兹公式及(8.20)和(8.22)得：对一切 $\psi_d\triangleq\alpha_d\varphi$ 及一切$|p|\leqslant m$ 有

$$|D^p\psi_d(x)|\leqslant B\eta d^{-|p|}\quad (B \text{ 是常数}). \tag{8.23}$$

回忆 $T(\varphi)=T(\alpha_d\varphi)=T(\psi_d)$，而且考虑到当 $a\to 0$ 时，$D^p\psi_d\to 0$ 在 R^n 内一致成立，即得 $T(\varphi)=0$． □

系 若分布 T 的支集仅由一点 b 组成，则 T 可唯一地表示为点 b 的 δ 函数及其导数的线性组合：

$$T=\sum_{|p|\leqslant m}C_pD^p\delta_{(b)},$$

这里 C_p 为复常数，m 依赖于 T．

证：不妨假设 $b=0$，因为 T 的支集为紧的，故 T 为有限阶，

不妨设为m阶，则由定理 8.10，对一切$|\alpha|\leqslant m$及$\psi\in\mathscr{D}$，有$D^\alpha\psi(0)=0$，于是$T(\psi)=0$.

对任意$\varphi\in\mathscr{D}$，有

$$\varphi(x)=\sum_{|p|\leqslant m}\frac{D^p\varphi(0)}{p!}x^p+\psi(x),$$

这里$\psi\in\mathscr{D}$，而且$|\alpha|\leqslant m$时，$D^\alpha\varphi(0)=0$，于是$T(\psi)=0$，即

$$T(\varphi)=\sum_{|p|\leqslant m}\frac{D^p\varphi(0)}{p!}T(x^p),$$

所以

$$T=\sum_{|p|\leqslant m}C_pD^p\delta.$$

分解式是唯一的. 事实上，因为

$$T(x^q)=\sum_{|p|\leqslant m}C_pD^p\delta_{(x^q)}=\sum_{|p|\leqslant m}C_p(-1)^{|p|}\delta_{(D^px^q)}$$
$$=(-1)^{|q|}C_qq!,$$

于是令$T=0$，则$T(x^q)=0$，故相应的$C_q=0$. □

3. 具任意支集的分布的表示

现在我们转向具任意支集的分布T. 不能期望如前一样，把分布T表示为有限个函数的导函数的和，然而可以表示为$\sum_i T_i$，这里Σ是局部有限的，即$\mathbb{R}^n$内每个紧集仅与有限多个函数的导函数T_i的支集相交.

定理 8.11 设$\{\Omega_i\}$是分布T的支集F的可列开覆盖，则T能分解为局部有限级数：

$$T=\sum_i T_i, \tag{8.24}$$

这里T_i的支集包含于$\Omega_i\cap F$内.

证： 设Ω_0是F的余集，则Ω_0与$\{\Omega_i\}$组成$\mathbb{R}^n$的开覆盖. 命α_0及$\{\alpha_i\}$组成从属于此覆盖的单位分解. 定义

$$T_0(\varphi)=T(\alpha_0\varphi),\quad T_i(\varphi)=T(\alpha_i\varphi).$$

因 $\alpha_0\varphi$ 的支集包含于 F 的余集内，$T(\alpha_0\varphi)=0$，因此 $T_0(\varphi)=0$，而分布T_i的支集 F_i 包含于$\Omega_i\cap F$ 内，从而级数$\sum\limits_i T_i$ 是局部有限的，而且有

$$\sum_{i=1}^{\infty}T_i(\varphi)=\sum_{i=0}^{\infty}T(\alpha_i\varphi)=T\left(\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\varphi\right)=T(\varphi).\quad\square$$

定理8.12　每个分布T能写为下列形式：

$$T=\sum_j D^{\beta_j}G_j,\tag{8.25}$$

这里每个G_j都是具有紧支集的连续函数，而这些支集包含于T的支集F的任意给定的邻域U内，而且级数(8.25)是局部有限的.

证：取有界开集Ω_i组成的F的可列覆盖，而且分解T成级数(8.24)，应用定理 8.8 于每个T_i即可.　$\square$

定理8.13　若T是阶数$\leqslant m$的开集Ω上的分布，则能把它分解为有限个测度的阶数$\leqslant m$的导数和. 反之是平凡的.

证：如上定理的证明一样，取F的覆盖$\{\Omega_i\}$，再应用定理 8.9 于每个T_i得

$$T=\sum_{|p|\leqslant m}D^p\mu_{p,i}.$$

取$\mu_p=\sum\limits_i\mu_{p,i}$，即得

$$T=\sum_{|p|\leqslant m}D^p\mu_p.\quad\square\tag{8.26}$$

我们用定理8.10的推广来结束本节.

定理 8.14　若某个$\varphi\in\mathscr{D}$的一切导函数在T的支集上为0，则$T(\varphi)=0$. 若T的阶数$\leqslant m$，而且φ与它的前m阶导函数在T的支集上为0，则$T(\varphi)=0$.

此定理可由定理8.10及8.11推出.

注：设Φ是包含$\mathscr{D}$的完备赋可列范基本空间，则由第二章定理2.1推出：若$T\in\Phi'$，则当$\varphi_m\longrightarrow 0(D_N)$时$T(\varphi_m)\longrightarrow 0$，这里$N$是紧集．由定理3.4知$T$是分布，于是本节的结构定理对于$T$限制于$\mathscr{D}$上时也成立.

§9 分布的直积(张量积)

1. 分布的直积的概念

在本节内假定x在R^m内变化，y在R^n内变化．两个函数$f(x)$，$g(y)$的直积的意义就是它们的乘积$f(x)g(y)$，我们也记为$f(x)\otimes g(y)$．用分布符号应有

$$f\otimes g(\varphi)\triangleq f(x)[g(y)[\varphi(x,y)]]$$
$$=g(y)[f(x)[\varphi(x,y)]]. \tag{9.1}$$

这里$h[\psi]$或$h(\psi)$表示h作用于ψ，而$\varphi(x,y)$表示(x,y)在R^m与R^n的直积$\mathrm{R}^m\times\mathrm{R}^n$内变化时$\mathscr{D}_{x,y}$的基本函数．若

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y),$$

则
$$(f\otimes g)(\varphi)=f(\varphi_1)g(\varphi_2). \tag{9.2}$$

对于测度可有类似定义：

定义 9.1 设μ_x,ν_y是测度，则它们的**直积**定义为：

$$\mu_x\otimes\nu_y(\varphi)=\mu_x[\nu_y[\varphi(x,y)]]=\nu_y[\mu_x[\varphi(x,y)]],$$

$h[\psi]$和$\varphi(x,y)$的意义如上.

现在证明：对任意给定的$S_x\in(\mathscr{D}')_x$及$T_y\in(\mathscr{D}')_y$[①]，必存在唯一的分布$S_x\otimes T_y$满足类似于(9.1)和(9.2)的性质，即有如下定理：

定理 9.1 设$S_x\in(\mathscr{D}')_x$，$T\in(\mathscr{D}')_y$，则存在唯一的分布W_{xy}

① $(\mathscr{D}')_x$表示$x\in\mathrm{R}^m$时$\varphi(x)$组成的空间$\mathscr{D}_x$的共轭空间，$(\mathscr{D}')_y$表示$y\in\mathrm{R}^n$时$\psi(y)$组成的空间$\mathscr{D}_y$的共轭空间，$(\mathscr{D}')_{x,y}$类似.

$\in (\mathscr{D}')_{x,y}$，使

$$W_{x,y}[u(x)v(y)] = S(u)T(v) \tag{9.3}$$

对一切 $u \in \mathscr{D}_x, v \in \mathscr{D}_y$ 成立，记 $S_x \otimes T_y = W_{x,y}$. 对每个 $\varphi \in \mathscr{D}_{x,y}$，有

$$\begin{aligned} S_x \otimes T_y(\varphi(x,y)) &= S_x[T_y(\varphi(x,y))] \\ &= T_y[S_x(\varphi(x,y))]. \end{aligned} \tag{9.4}$$

证： 先证明存在性. 我们希望所定义的 $W_{x,y}$ 具有如下形式：

$$W_{x,y}[\varphi(x,y)] = T_y[\psi(y)], \tag{9.5}$$

这里 $\psi(y) = S_x[\varphi(x,y)]$. 于是我们必须先证明 $\psi(y) \in \mathscr{D}_y$. 为此设 $\varphi \in (\mathscr{D})_{x,y}$，如视 y 为参数，则 $\varphi(x,y) \in \mathscr{D}_x$，因此 $S_x[\varphi(x,y)]$ 有意义，它确定一个 $\mathscr{D}_y$ 上的函数 $\psi(y)$. 事实上，作差商：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}(\psi(y_1+h,\cdots,y_n) - \psi(y_1,\cdots,y_n)) \\ &= \frac{1}{h}(S_x[\varphi(x,y_1+h,\cdots,y_n)] - S_x[\varphi(x,y_1,\cdots,y_n)]) \\ &= S_x\left[\frac{\varphi(x,y_1+h,\cdots,y_n) - \varphi(x,y_1,\cdots,y_n)}{h}\right] \\ &\longrightarrow S_x\left[\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y_1}\right] \quad (h\to 0)\,(\mathscr{D}_y). \end{aligned}$$

因此 $S_x[\varphi(x,y)]$ 对 y_1 可微，而且 $D_y\psi(y) = S_x[D_y\varphi]$. 由此继续类推知，$S_x[\varphi(x,y)]$ 对 y 无穷可微. 又由函数 $\varphi(x,y)$ 在空间 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 上的紧性推知 $\psi(y)$ 的支集在 $(\mathscr{D})_y$ 上的紧性，所以 $\psi(y) \in \mathscr{D}_y$，从而(9.5)式合理.

显然 $W_{x,y}$ 是线性泛函，故只须证明其连续性. 设 $\varphi_j \longrightarrow 0$ $(\mathscr{D}_{x,y})$，因 $\varphi_j(x,y)$ 在空间 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 的一个公共紧集外恒等于零，因此函数 $S_x[\varphi(x,y)]$ 在空间 $\mathscr{D}_y$ 的一个公共紧集外恒为零，从而必在 $\mathscr{D}_y$ 上一致趋于零. 否则 $\{\varphi_j\}$ 必有一个子序列（不妨仍记之为 φ_j）及点列 $\{y_j\} \subset \mathbb{R}^n$，使 $S_x[\varphi_j(x,y)] \longrightarrow 0\,(\mathscr{D}_x)$，因此 $S_x[\varphi_j(x,y)]$

$\longrightarrow 0$,矛盾.所以函数$S_x[\varphi(x,y)]$在空间$\mathscr{D}_y$上一致收敛于0.再由上面证明得

$$D_y^p S_x[\varphi_j(x,y)] = S_x[D_y^p \varphi_j(x,y)]. \tag{9.6}$$

又因 $\varphi_j(x,y) \longrightarrow 0(\mathscr{D}_{x,y})$ 蕴含 $D_y^p \varphi_j(x,y) \longrightarrow 0(\mathscr{D}_{x,y})$,故由方才的证明可以推出函数 $D_y^p S_x[\varphi_j(x,y)]$在 R^n 上也一致收敛于 0,因此$S_x[\varphi_j(x,y)] \longrightarrow 0(\mathscr{D}_y)$.

为了证明$W_{x,y}$ 满足(9.3),将$\varphi(x,y)=u(x)v(y)$代入(9.5)即可.

现在证明唯一性.假设又有满足(9.3)的$\mathscr{D}'_{x,y}$内的分布

$$W^*_{x,y} = S_x[T_y(\varphi(x,y))],$$

只用证明函数 $u(x)$ $(u\in\mathscr{D}_x)$ 和函数 $v(y)$ $(v\in\mathscr{D}_y)$ 的一切有限和 $\sum\limits_{\nu} u_\nu(x)v_\nu(y)$组成的线性空间在$\mathscr{D}_{x,y}$内稠密.任取$\varphi(x,y)\in\mathscr{D}_{x,y}$,由维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 逼近定理(见文献 6 §3.4 定理 2),存在多项式序列$\{P_j(x,y)\}$,使得在空间 $\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n$ 内 $\varphi(x,y)$的支集的一个邻域上,$D^p P_j(x,y)$ 一致收敛于 $D^p\varphi(x,y)$. $P_j(x,y)$ 显然为$\sum\limits_{\nu} u_\nu(x)v_\nu(y)$的形式,但此处 $u_\nu(x)$与 $v_\nu(y)$的支集不是紧的.设N为$\varphi(x,y)$的支集,则恒可取 $\alpha(x)\in\mathscr{D}_x$及$\beta(y)\in\mathscr{D}_y$,使得在集$N$上,$\alpha(x)\beta(y)\equiv 1$,而在$N$的一个邻域外为 0.于是在 $\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n$上,$D^p[\alpha(x)\beta(y)P_j(x,y)]$一致收敛于$\alpha(x)\beta(y)\varphi(x,y)\equiv\varphi(x,y)$.注意,这时

$$\alpha(x)\beta(y)P_j(x,y) = \sum_{\nu} u_\nu(x)v_\nu(y),$$

$u_\nu(x)\in\mathscr{D}_x, v_\nu(y)\in\mathscr{D}_y$.唯一性证毕. □

定义 9.2 设 $S_x\in\mathscr{D}'_x$, $T_y\in\mathscr{D}'_y$,则称适合于(9.3)式的分布 $W_{x,y}$ 为 S_x 与 T_y 的**直积**或**张量积**,记为 $S_x\otimes T_y$.

由定理的证明可以断定：若$\{T_j\}$是分布序列，而且$T_j \longrightarrow 0$ $(\mathscr{D}')$，则

$$S_x \otimes (T_j)_y \longrightarrow 0(\mathscr{D}'_{x,y}).$$

又映射$(S,T) \mapsto S_x \otimes T_y$是从$\mathscr{D}' \times \mathscr{D}'$到$\mathscr{D}'_{x,y}$内的连续映射.

2. 分布的直积的性质

定理 9.2 两个分布 $S_x \in (\mathscr{D}')_x$, $T_y \in (\mathscr{D}')_y$ 的直积 $W_{x,y} \triangleq S_x \otimes T_y$的支集等于$S_x$ 与T_y 的支集的笛卡儿乘积，即

$$\mathrm{supp} W_{x,y} = \mathrm{supp} S_x \times \mathrm{supp} T_y. \tag{9.7}$$

证： 设 S 和 T 的支集依次为 A 和 B，它们在 R^n 内的余集依次为$\hat{A}$和$\hat{B}$. 若$\varphi \in \mathscr{D}_{x,y}$ 的支集属于$\hat{A} \times \mathrm{R}^n$ 或 $\mathrm{R}^m \times \hat{B}$，则由(9.4)可知$W_{x,y}(\varphi) = 0$，因此 $\mathrm{supp} W_{x,y} \subset A \times B$.

反之，若 $z \in A \times B$，则在 z 的任意邻域Ω内有$W_{x,y} \neq 0$. 事实上，我们能选取 $u(x), v(y)$，使得 $u(x)v(y) \in (\mathscr{D}_\Omega)_{x,y}$，而且使得$S(u) \neq 0, T(v) \neq 0$. 由(9.3)知 $W_{x,y} \neq 0$，故 $A \times B \subset \mathrm{supp} W_{x,y}$. □

为了证明包含直积的方程成立，时常作用方程的两边于试验函数$u(x)v(y)$，而且还要用(9.3). 例如，立刻可以证明

$$D_x^p D_y^q (S_x \otimes T_y) = D_x^p S_x \otimes D_y^q T_y, \tag{9.8}$$

$$T_{x,y} = T_x \otimes \delta_y, \tag{9.9}$$

这里 $T_{x,y}$ 是R^m上的分布.

定理 9.3(富比尼定理)

$$S_x \otimes T_y = T_y \otimes S_x. \tag{9.10}$$

证： $(S_x \otimes T_y)\varphi(x,y) = S_x[T_y, \varphi(x,y)]$

$= T_y[S_x, \varphi(x,y)] = (T_y \otimes S_x)\varphi(x,y).$ □

显然，可以推广两个分布的直积到有限多个分布的直积，它满足交换律与结合律：

$$(S_x \otimes T_y) \otimes U_z = S_x \otimes (T_y \otimes U_z). \tag{9.11}$$

也可用下式直接定义：

$$(S_x \otimes T_y \otimes U_z, u(x)v(y)w(z))$$

$$= (S_x, u(x))(T_y, v(y))(U_z, w(z)). \tag{9.12}$$

关于乘积与直积，有下列分配律成立：

定理 9.4 设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(y)$ 分别为空间 $\mathscr{D}_x$ 与 $\mathscr{D}_y$ 的乘子，$S_x \in \mathscr{D}'_x$，$T_y \in \mathscr{D}'_y$，则

$$\alpha(x)\beta(y)[S_x \otimes T_y] = \alpha(x)S_x \otimes \beta(y)T_y. \tag{9.13}$$

证： 由定理 9.1 的证明，只须对 $\varphi(x,y) = u(x)v(y)$（$u \in \mathscr{D}_x$，$v \in \mathscr{D}_y$）加以证明即可，而后者是显然的。]

§10 分布的卷积

1. 卷积的概念

定义 10.1 若 f 和 g 是局部可积函数，我们定义它们的**卷积** $f * g$ 如下：

$$(f*g)(x) = \int_{R^n} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t. \tag{10.1}$$

这里假定积分存在．我们已知，若 $f \in L^p$，$g \in L^q$ 且 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$1 \leqslant q \leqslant \infty$，则 $f * g$ 几乎处处存在而且属于 L^r，这里 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$．

又有

$$\|f*g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \quad \text{（杨(Young)不等式）} \tag{10.2}$$

若 $r = \infty$，则 $f * g$ 处处存在而且是连续函数．

由(10.1)，对于 $\varphi \in \mathscr{D}$ 有

$$\begin{aligned}(f*g)\varphi &= \iint f(x-t)g(t)\varphi(x)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int g(t)\mathrm{d}t \int f(x-t)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int g(t)\mathrm{d}t \int f(x)\varphi(x+t)\mathrm{d}x①.\end{aligned}$$

① 不写积分域的积分意为在全空间上的积分，下同。

这里假定变换积分次序合理. 因此

$$(f*g)\varphi = g(t)[f(\tau_t\varphi)] = g(t)f(x)\varphi(x+t), \tag{10.3}$$

这里$g(t)[\alpha(t)]$及$g(y)[\alpha(y)]$意为分布 g 作用于α[①].

2. 分布的卷积

由第一段知 $\varphi(x+t)$作为 x 和 t 的函数在R^m 和 R^n 内未必有紧支集，为了避免收敛性困难，我们首先假定 $S*T$ 中至少有一个分布的支集是紧的[②]. 不妨设 S 的支集A 是紧集. 由(10.3)我们希望定义：

$$(S*T)\cdot\varphi = S_\xi\otimes T_\eta\cdot\varphi(\xi+\eta) \quad (\varphi\in\mathscr{D}). \tag{10.4}$$

为了证明右边有意义，先注意 $S_\xi\otimes T_\eta$ 的支集包含于$A\times R^n$内. 记φ的支集为N，则$\varphi(\xi+\eta)$的支集在$R^m\times R^n$内与$S_\xi\otimes T_\eta$的支集在点(ξ,η)组成的集内相交. 这里$(\xi,\eta)\in A\times R^n$而且$\xi+\eta\in N$，即 $(\xi,\eta)\in A\times(N\backslash A)$. 因$A\times(N\backslash A)$是有界集，于是(10.4)右边有意义. 又，若$\alpha\in\mathscr{D}$而且在$A$的某邻域内$\alpha=1$，则

$$(S*T)\varphi = S_\xi\otimes T_\eta[\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)]. \tag{10.5}$$

由定理9.3，卷积适合交换律 $S*T=T*S$.

定理 10.1 若 S 和 T 为分布而且至少有一个具有紧支集，则存在分布 $S*T$，称为 S 和 T 的卷积，由下式定义：

$$(S*T)_x\cdot\varphi(x) = S_\xi\otimes T_\eta\cdot\varphi(\xi+\eta) \quad (\varphi\in\mathscr{D}).$$

证：只须证 $S*T$ 的连续性，若 φ 在有界集 $B\subset\mathscr{D}$ 内变化，则 $\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)$在 $\mathscr{D}_{\xi,\eta}$ 的有界集内变化. 因为(10.5)式右边组成有界集，然而(10.5)右边等于(10.4)右边，于是 $S*T$ 在$\mathscr{D}$内的有界集上有界，从而是连续线性泛函. $\Box$

---

① 若$f(x)$，$g(x)$为函数型广义函数，$f(x)$有紧支集，则

$$(f*g)\varphi = \int\varphi(x)dx\int g(t)f(x-t)dt = \int(f*g)(x)\varphi(x)dx,$$

由此可知，广义函数的卷积是普通函数卷积的推广.

② 参看 §12 之末的注 3.

定理 10.2 设 S 和 T 是分布，A 和 B 依次是它们的支集. 假定 A 是紧集，则 $S*T$ 的支集包含于(向量)和 $A+B$① 内.

证：因为 $A+B$ 是闭集，因此我们只须证明 $\varphi\in(D_\Omega)$(Ω 是 $A+B$ 在 R^n 内的余集)时，$(S*T)\cdot\varphi=0$. 因为这时 $\varphi(\xi+\eta)$ 的支集位于 $\mathrm{R}^m\times\mathrm{R}^n$ 内，而且包含于满足 $\xi+\eta\in\Omega$ 的点集内. 又根据定理 9.2，$S_\xi\otimes T_\eta$ 的支集是 $A\times B$，从而包含于 $A+B$ 内. 因为 $\Omega\cap(A+B)=\varnothing$，$\varphi(\xi+\eta)$ 的支集不与 $S_\xi\otimes T_\eta$ 的支集相交，由(10.4)知 $(S*T)\cdot\varphi=0$. □

系 设 S 和 T 都具紧支集，则 $S*T$ 也具紧支集.

定理 10.3(卷积的连续性)

(1) 设 S 是具紧支集的分布，$\{T_j\}$ 是分布序列，而且 $T_j\longrightarrow 0\ (\mathscr{D}')$，则 $S*T_j\longrightarrow 0(\mathscr{D}')$；

(2) 若 T_j 的支集一致有界，而 S 是具任意支集的分布，而且 $T_j\longrightarrow 0(\mathscr{D}')$，则 $S*T_j\longrightarrow 0(\mathscr{D}')$.

证：(1) 设 A 是 S 的支集，取 $\alpha\in\mathscr{D}$，使得在 A 的某邻域上 $\alpha=1$. 只须证明对任意有界集 $B\subset\mathscr{D}$，当 $j\longrightarrow\infty$ 时 $(S*T_j)(B)\longrightarrow 0$. 若 φ 在 B 内变化，则 $\alpha(\xi)\cdot\varphi(\xi+\eta)$ 在 $\mathscr{D}_{\xi,\eta}$ 的有界集 B_1 内变化. 但是集

$$B_2\triangleq\{I_\varphi\mid I_\varphi(\eta)=S_\xi[\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)],\varphi\in B\}$$

是 $\mathscr{D}_\eta$ 内的有界集. 事实上，任取 $\mathscr{D}_{x,y}$ 内的有界集 $B_{x,y}$，I_φ 的支集包含于 R^n 的某紧子集内. 又，对于任意 q，集

$$B_q\triangleq\{\psi_{q,y}\mid\psi_{q,y}(x)=D_y^q\varphi(x,y),y\in\mathrm{R}^n\cap B_{x,y}\}$$

是 $\mathscr{D}_x$ 内的有界集，于是由定理 1.2 知，B_2 是有界集. 于是 $j\longrightarrow\infty$ 时，$T_j(B_2)\longrightarrow 0$. 又由

$$T_j(B_2)=(S*T_j)(B)$$

即得 $S*T_j\longrightarrow 0(\mathscr{D}')$.

(2) 因为 $\mathrm{supp}T_j$ 一致有界，所以存在紧集 A，使得 $\mathrm{supp}T_j\subset$

① $A+B=\{x+y\mid x\in A,\ y\in B\}$.

A. 今取$\alpha\in\mathscr{D}$,使得在A的某邻域内 $\alpha=1$,则对每个$\varphi\in\mathscr{D}$,有

$$(S*T_j,\varphi)=(T_{j,x},(S_y,\varphi(x+y)))$$
$$=(T_{j,x},\alpha(x)(S_y,\varphi(x+y)))=(T_{j,x},\ \psi(x)).$$

易知$\psi\in\mathscr{D}$,于是当$T_j\to 0(\mathscr{D}')$时,

$$(S*T_j,\varphi)=(T_j,\psi)\to 0(\ j\to\infty).\ \square$$

3.卷积的运算

定理 10.4(卷积的结合律) 设A, B, C是分布,其中至少有两个具有紧支集,则

$$(A*B)*C=A*(B*C). \tag{10.6}$$

证: 设α,β,γ依次在A, B, C的支集的某邻域内为1,且均属于$\mathscr{D}$. 又设A, B及α,β均有紧支集,则由定理10.2的系,$A*B$也有紧支集,因而$(A*B)*C$有意义. 而$A*(B*C)$自然有意义,于是

$$(A*B)*C\cdot\varphi=(A_\xi\otimes B_\eta\otimes C_\zeta)\cdot\alpha(\xi)\beta(\eta)\gamma(\zeta)\varphi(\xi+\eta+\zeta).$$

事实上,一方面,

$$A*(B*C)\cdot\varphi=\alpha A*(\beta B*\gamma C)\cdot\varphi$$
$$=(\beta B*\gamma C)_\eta[A_\xi\cdot\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)]$$
$$=(\gamma C)_\zeta[B_\eta(A_\xi\cdot\alpha(\xi)\beta(\eta)\varphi(\xi+\eta+\zeta))]$$
$$=C_\zeta[B_\eta(A_\xi\cdot\alpha(\xi)\beta(\eta)\gamma(\zeta)\varphi(\xi+\eta+\zeta))],$$

另一方面,

$$(A*B)*C\cdot\varphi=(\alpha A*\beta B)*\gamma C\cdot\varphi$$
$$=(\gamma C)_\zeta[(\alpha A*\beta B)_\eta\cdot\varphi(\eta+\zeta)]$$
$$=C_\zeta\cdot\gamma(\zeta)[B_\eta(A_\xi\cdot\alpha(\xi)\beta(\eta)\varphi(\xi+\eta+\zeta)]$$
$$=C_\zeta[B_\eta(A_\xi\cdot\alpha(\xi)\beta(\eta)\gamma(\zeta)\varphi(\xi+\eta+\zeta)].$$

易证$\alpha(\xi)\beta(\eta)\gamma(\zeta)\varphi(\xi+\eta+\zeta)$在$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n[\xi,\eta,\zeta]$上具有紧支集,即属于$\mathscr{D}_{\xi,\eta,\zeta}$,因此

$$C_\zeta[B_\eta(A_\xi\cdot\alpha(\xi)\beta(\eta)\gamma(\zeta)\varphi(\xi+\eta+\zeta))]$$
$$=(A_\xi\otimes B_\eta\otimes C_\zeta)[\alpha(\xi)\beta(\eta)\gamma(\zeta)\varphi(\xi+\eta+\zeta)],$$

于是结合律成立, 而且$A*B*C\in\mathscr{D}'$. $\square$

由卷积的交换、结合律可得如下定理：

定理 10.5 设有 k 个分布 $T_1,\cdots,T_k$，其中至少有 $k-1$ 个具紧支集，则总可定义满足交换律、结合律的卷积 $T_1*\cdots*T_k\in\mathscr{D}'$.

定理 10.6 对任意分布 T，总有

$$\delta*T=T\text{①},\tag{10.7}$$

$$\delta_{(h)}*T=\tau_{-h}T,\tag{10.8}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial x_k}*T=\frac{\partial T}{\partial x_k},\qquad D^p\delta*T=D^pT.\tag{10.9}$$

若 S 有紧支集，则有

$$\tau_h(S*T)=(\tau_hS)*T=S*\tau_hT,\tag{10.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(S*T)=\frac{\partial S}{\partial x_k}*T=S*\frac{\partial T}{\partial x_k},\tag{10.11}$$

$$D^p(S*T)=D^pS*T=S*D^pT.\tag{10.12}$$

证： (10.7)是(10.8)的特例. 由

$$\begin{aligned}(\delta_{(h)}*T)\varphi&=T_\xi[(\delta_{(h)})_\eta\cdot\varphi(\xi+\eta)]\\&=T_\xi\cdot\varphi(\xi+h)=T\cdot\tau_h\varphi\\&=\tau_{-h}T\cdot\varphi,\end{aligned}$$

所以(10.8)成立. 又由

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_k}*T\right)\cdot\varphi&=T_\xi\left[\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_k}\right)_\eta\cdot\varphi(\xi+\eta)\right]\\&=T_\xi\left(-\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi_k}\right)=\frac{\partial T}{\partial x_k}\cdot\varphi(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D^p\delta*T,\varphi)&=(T_\xi,(D^p\delta,\tau_\xi\varphi))\\&=(T_\xi,(\delta,(-1)^{|p|}\tau_\xi D^p\varphi))\\&=(-1)^{|p|}(T,D^p\varphi)=(D^pT,\varphi),\end{aligned}$$

① 这个等式说明 δ 是卷积意义下的单位元素，从而 $\mathscr{E}'(\mathrm{R}^n)$ 关于卷积是一个可交换的与可结合的代数。

继续求导即知(10.9)成立.

又因为

$$\tau_h(S*T)\cdot\varphi=(S*T)\tau_h\varphi=T_\eta(S\cdot\tau_\eta\tau_h\varphi),$$
$$(\tau_h S*T)\cdot\varphi=T_\eta(\tau_h S\cdot\tau_\eta\varphi)=T_\eta(S\cdot\tau_h\tau_\eta\varphi),$$
$$(S*\tau_h T)\cdot\varphi=\tau_h T_\eta(S\cdot\tau_\eta\varphi)=T_\eta(\tau_h(S\cdot\tau_\eta\varphi))$$
$$=T_\eta(S\cdot\tau_{h+\eta}\varphi),$$

而 $\tau_\eta\tau_a=\tau_a\tau_\eta=\tau_{a+\eta}$,所以(10.10)成立.

最后,由(10.9)及(10.6),有

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(S*T)=\frac{\partial\delta}{\partial x_k}*(S*T)$$
$$=\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_k}*S\right)*T=\frac{\partial S}{\partial x_k}*T,$$

$$(D^p(S*T),\varphi)=(-1)^{|p|}(T_\eta,(S,\tau_\eta D^p\varphi)),$$
$$((D^pS*T),\varphi)=(T_\eta,(D^pS,\tau_\eta\varphi))$$
$$=(-1)^{|p|}(T_\eta,(S,D^p\tau_\eta\varphi)),$$
$$(S*D^pT,\varphi)=(D^pT_\eta,(S,\tau_\eta\varphi))$$
$$=(T_\eta,(-1)^{|p|}D_\eta^p(S,\tau_\eta\varphi))$$
$$=(-1)^{|p|}(T_\eta,\tau_\eta D^p\varphi),$$

而 $D^p\tau_\eta=\tau_\eta D^p$,故(10.11)成立. 同理(10.12)成立. □

广义函数的微分运算及平移运算都可表示为对 δ 函数及其导数的卷积运算,而且卷积运算与微分运算、平移运算之间存在着简单的交换关系.

定理 10.7 设 $A_x,B_x\in(D)_x,C_y,D_y\in(D)_y$,且 A_x,C_y 具有紧支集,则

$$(A_x\otimes C_y)*(B_x\otimes D_y)=(A_x*B_x)\otimes(C_y*D_y).\tag{10.13}$$

证明留作练习.

定理 10.8 $e^{a\cdot x}(S*T)=e^{a\cdot x}S*e^{a\cdot x}T,$

$$(a\cdot x)(S*T)=((a\cdot x)S)*T+S*(a\cdot x)T,$$

这里 $a\cdot x$ 表示内积 $\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$.

证明留作练习.

§11 分布的中值函数

在§2中我们用过卷积来作连续函数的中值函数，由此得到许多逼近定理. 这种方法称为中值逼近法，它可以阐明函数的构造. 这个概念也可以推广到广义函数论中而得到广义函数的逼近定理，也可以阐明广义函数的构造.

定理 11.1 设 $\alpha\in\mathscr{D}$，$T\in\mathscr{D}'$，则卷积 $T*\alpha$ 是无穷可微函数型广义函数，而且

$$(T*\alpha)_x=T_t\cdot\alpha(x-t). \tag{11.1}$$

它的导函数由下式表示：

$$D^p(T*\alpha)_x=T_t\cdot D_x^p\alpha(x-t). \tag{11.2}$$

证： $(T*\alpha)\cdot\varphi=T_t[\alpha_\eta\cdot\varphi(t+\eta)]$

$$=T_t\cdot\int\alpha(\eta)\varphi(t+\eta)\,\mathrm{d}\eta=T_t\int\alpha(x-t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x^{①}$$

$$=T_t\otimes\varphi_x\cdot\alpha(x-t)=\varphi_x\cdot[T_t\cdot\alpha(x-t)]$$

$$=[T_t\cdot\alpha(x-t)]\cdot\varphi,$$

即(11.1)成立. 又由(10.11)得

$$D^p(T*\alpha)_x=T_t*D^p\alpha=T_t\cdot D_x^p\alpha(x-t),$$

即(11.2)成立. □

注：同理，若 $\alpha\in(D^m)$，$T\in(D^m)'$，则 $T*\alpha$ 是由(11.1)给定的连续函数.

---

① 参看207页注①

$T * \alpha$ 称为 T 由 α **正则化**.

由基本空间、广义函数空间的极限定义，以及卷积的连续性，立即可得关于中值运算的连续性定理：

定理 11.2 设 $\alpha, \alpha_j \in \mathscr{D}, T, T_j \in \mathscr{D}'$，则

(1) $T_j \longrightarrow 0(\mathscr{D}')$ 蕴涵 $\alpha * T_j \longrightarrow 0(\mathscr{D}')$；

(2) $\alpha_j \longrightarrow 0(\mathscr{D})$ 蕴涵 $\alpha_j * T \longrightarrow 0(\mathscr{D}')$.

根据卷积的连续性，即中值函数的无穷可微性，可以证明任意分布都可由 C^∞ 函数逼近，即下列定理成立：

定理 11.3 空间 $\mathscr{D}$ 是空间 $\mathscr{D}'$ 的稠密子空间.

证：任取 $T \in \mathscr{D}'$，则由第二章 § 7，存在 δ 型序列 $\rho_j \in \mathscr{D}$ 且 $\rho_j \longrightarrow \delta(\mathscr{D}')$，因此

$$\rho_j * T \longrightarrow \delta * T = T(\mathscr{D}').$$

设 $\beta_j \in \mathscr{D}$ 满足 $\beta_j(x) \equiv 1(|x| \leqslant j)$，于是 $\psi_j \triangleq \beta_j \cdot (\rho_j * T) \in \mathscr{D}$ 且 $\psi_j \longrightarrow T(\mathscr{D}')$. □

记反射运算为 $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$，$\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$，则易证下面公式成立：

$$D^p \check{T} = (-1)^{|p|}(D^p T)\check{}\,, \tag{11.3}$$

$$(\alpha T)\check{} = \check{\alpha} \cdot \check{T}, \tag{11.4}$$

$$(S * T)\check{} = \check{S} * \check{T}, \tag{11.5}$$

$$(S * T)\varphi = T \cdot (\check{S} * \varphi) = S \cdot (\check{T} * \varphi). \tag{11.6}$$

定理 11.4 设 $\varphi \in \mathscr{D}, T \in \mathscr{D}'$，则

$$T(\varphi) = \mathrm{Tr}(T * \check{\varphi}) = \mathrm{Tr}(\check{T} * \varphi), \tag{11.7}$$

这里 $\mathrm{Tr} f(x) = f(0)$ 称为 $f(x)$ 的**迹**. 由此知，如果对一切 $\varphi \in \mathscr{D}$，$T * \varphi = 0$，则 $T = 0$.

证：
$$(T * \check{\varphi})_x = T_t \cdot \check{\varphi}(x - t) = (T_t, \varphi(t - x)),$$

$$(\check{T} * \varphi)_x = \check{T}_t \cdot \varphi(x - t) = T_t \varphi(x + t).$$

令 $x = 0$，即得(11.7). □

§12 卷积方程及其基本解

1. 一般概念

定义12.1 设A和B为已知分布，T为未知分布，则方程

$$A*T=B \tag{12.1}$$

称为分布的**卷积方程**，A称为方程的**系数**．若$B=0$，则卷积方程叫**齐性**的．

我们也讨论卷积方程组．设$B=\{B_1,\cdots,B_m\}$为已知"向量"分布，$T=\{T_1,\cdots,T_m\}$为未知"向量"分布，$A=(A_{jk})$为已知分布的矩阵（m行，m列），则有卷积方程组：

$$\sum_{k=1}^{m}A_{jk}*T_k=B_j.\qquad (j=1,2,\cdots,m) \tag{12.2}$$

为简便记，我们恒用向量表示法，即用(12.1)表示(12.2)．若$B=0$，则方程组称为齐性的．

卷积方程把数学分析里常见的各种不同类型方程，包括微分、差分、积分方程等从形式上统一起来了．例如：

(1) 设$A=\sum\limits_{|p|\leqslant m}a_pD^p\delta$为微分符号多项式，系数$a_p$为复常数，则方程(12.1)即为

$$A*T=\sum_{|p|\leqslant m}a_pD^pT=B. \tag{12.3}$$

此为常系数偏微分方程．

(2) 设$A=\sum\limits_{\nu}a_\nu\delta_{(h_\nu)}$，则方程(12.1)即为

$$A*T=\sum_{\nu}a_\nu\tau_{h_\nu}T=B. \tag{12.4}$$

此为常系数差分方程．

(3) 设A为函数$k(x)$或$\delta+k(x)$，B为函数$g(x)$，T为函数

$f(x)$，则得

$$A*f=\int f(t)k(x-t)\mathrm{d}t=g(x), \tag{12.5}$$

或
$$A*f=f(x)+\int k(x-t)f(t)\mathrm{d}t=g(t), \tag{12.6}$$

即第一种及第二种积分方程.

(4) 设A为上述各种分布的组合，即可以得到各种类型的积分-微分方程、微分-差分方程等.

2.卷积方程解的一般性质

定理 12.1 卷积方程 $A*T=B$ 的解T 组成分布空间内的一个线性闭流形，即

(1) 设 T_j 是解，$T_j\to T$，则 T 也是解；

(2) 齐性方程$A*T=0$的解组成空间 $\mathscr{D}'$ 内的一个线性子空间；

(3) 若卷积方程 $A*T=B$ 有解，则其通解为 T_0+U，此处T_0为一特解，而U为相应齐性方程的通解.

此定理的成立是显然的.

定理 12.2 设T_0为空间 $\mathscr{D}$ 内的齐性卷积方程 $A*T=0$ 的解，则 T_0 的任意平移 τ_aT_0 及任意导数 D^pT_0 仍为该方程的解.

证： 因 $A*T_0=0$，则由定理 10.6，有

$$A*\tau_aT_0=\tau_a(A*T_0)=0,$$
$$A*D^pT_0=D^p(A*T_0)=0. \quad \square$$

定理 12.3 设 $A\in\mathscr{D}'$ 具有紧支集，$T_0\in\mathscr{D}$ 为空间 $\mathscr{D}$ 内齐性卷积方程

$$A*T_0=0 \tag{12.7}$$

的解，则

(1) 对任意具紧支集的 $S\in\mathscr{D}'$，卷积 $S*T_0$ 仍为 (12.7) 的解；

(2) 对任意 $\alpha\in\mathscr{D}$，中值函数 $\alpha*T_0$ 仍为(12.7)的解；

(3) T_0 可以表示为方程(12.7)的无穷可微函数解的极限，即

存在(12.7)的无穷可微函数解 f_j，使 $f_j \longrightarrow T_0(\mathscr{D}')$.

证： (1) $A*(S*T_0) = S*(A*T_0) = 0$.

(2) 是(1)的特例.

(3) 取 $\alpha_j \in \mathscr{D}$，$\alpha_j \longrightarrow \delta(\mathscr{D}')$，则由(2)得 $f_j = \alpha_j * T_0$ 都是(12.7)的解，但 $f_j \in C^\infty$ 而且

$$f_j = \alpha_j * T_0 \longrightarrow \delta * T_0 = T_0(\mathscr{D}'). \quad \square$$

将这个定理应用到微分方程，则得下述重要推论：

系 空间 $\mathscr{D}$ 内常系数齐性微分方程

$$\sum_{|p| \le m} a_p D^p T = 0 \tag{12.8}$$

的任意解 $T \in \mathscr{D}'$ 必可表示为无穷可微函数解的极限.

3. 基本解

定义12.2 设分布 A 具紧支集. 若分布 E 满足方程

$$A*E = \delta, \tag{12.9}$$

则称 E 为卷积 $A*T = 0$ 的**基本解**. 对于方程组(12.2)，其基本解为分布矩阵 $E = (E_{jk})(j,k = 1, \cdots, m)$，满足

$$A*E = E*A = \delta I \quad (I \text{ 为单位矩阵}) \tag{12.10}$$

或

$$\sum_{k=1}^{m} A_{jk} * E_{ki} = \sum_{k=1}^{m} E_{jk} * A_{ki} = \begin{cases} 0, & j \ne i \\ \delta, & j = i \end{cases} \tag{12.11}$$

我们也可定义任意点 $h \in \mathrm{R}^n$ 的基本解，只须将(12.11)中 δ 改为 $\delta_{(h)}$ 即可. 显然平移算子可以从对原点的基本解得到对点 h 的基本解，故不失普遍性，我们只讨论对原点的基本解.

下面只限于讨论一个方程，即 $m = 1$ 的情形.

显然可见，若卷积方程(12.1)有基本解，则必有无穷多个解. 事实上，任一基本解加上一个齐性方程的任意解仍为基本解.

基本解可以不存在. 例如设 $A \in \mathscr{D}$，则对任意 $E \in \mathscr{D}'$，$A*E$ 均为无穷可微函数型广义函数，因此 $A*E \ne \delta$. 当基本解存在时，也称 A 为可逆的.

定理 12.4 设 A 为可逆的，并设卷积方程(12.1)的右边 B 具有紧支集. 若 E 为基本解，则 $E*B$ 必为(12.1)的解，而且每个具有紧支集的解 T 必为

$$T=E*B. \tag{12.12}$$

证： 因为 B 具有紧支集，故 $E*B$ 恒有意义：

$$A*(E*B)=(A*E)*B=\delta*B=B.$$

又若解 T 具有紧支集，则 E，A，T 三者中至少有两个具有紧支集，故可应用卷积的结合律得

$$E*B=E*(A*T)=(E*A)*T=\delta*T=T. \quad \square$$

注：(1) 卷积方程通常恒有不具紧支集的解，可由具紧支集的解加上一个齐性方程的任意解而得.

(2) 若上述方程中 B 不具有紧支集，则上述定理无法应用，但有时仍可用逼近方法利用基本解 E 求解.

(3) 上面我们定义卷积 $S*T$ 时，首先要求其因子之一具有紧支集，也可适当改变这个条件，即不要求因子之一具有紧支集，但要求两个因子的支集都在适当的子空间之内，而且这个卷积的支集也在一个适当的子空间之内，则也可定义卷积，而且满足交换律与结合律.

§13 空间 $K_r\{M_p\}$ 和 (D^{r}) 及其广义函数的结构

1. 空间 $K_r\{M_p\}$

在第二章内我们考虑了空间 $K\{M_p\}$ 及其上广义函数的结构. 现在考虑空间 $K_r\{M_p\}$，这里 M_p 与第二章相同，而 r 是大于或等于 1 的任意实数. 为简单计，我们假定 $M_p(x)$ 是全空间 R^n 上只取有限值的(实值)连续函数(满足第二章(2.1)式). 空间 $K_r\{M_p\}$ 由 R^n 上满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|^r \mathrm{d}x$$

有界的一切复值 C^∞ 函数组成，其范数

$$\|\varphi\|_{p,r} = \sup_{|\alpha|\leqslant p}\left[\int_{\mathbb{R}^n} M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|^r \mathrm{d}x\right]^{1/r} \quad (p=1,2,\cdots) \tag{13.1}$$

为有限数. 把 $\Phi\equiv K_r\{M_p\}$关于范数(13.1)的完备化记为 Φ_p.

为了研究 $K_r\{M_p\}$ 的性质，我们先作些准备工作. 任取 $K_r\{M_p\}$内的柯西序列$\{\varphi_m\}$，则对任意 $k\geqslant m$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_p(x)|D^\alpha\varphi_m(x)-D^\alpha\varphi_k(x)|^r \mathrm{d}x$$
$$\leqslant(\|\varphi_m-\varphi_k\|_{p,r})^r\leqslant\varepsilon, \quad (|\alpha|\leqslant p) \tag{13.2}$$

这里 $\varepsilon_m\to 0\,(m\to\infty)$.

如所周知，$L^r(\mathbb{R}^n)$ 关于 $\mathbb{R}^n$ 上的测度由任意正密度函数给定时，它是完备空间，因此有可测函数 $\varphi_{0,\alpha}$，使$\|\varphi_{0,\alpha}\|_{p,r}<\infty$，而且

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_p(x)|D^\alpha\varphi_m(x)-\varphi_{0,\alpha}(x)|^r \mathrm{d}x\to 0 \quad (m\to\infty). \tag{13.3}$$

因为 $M_p(x)\geqslant 1$，所以有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha\varphi_m(x)-\varphi_{0,\alpha}(x)|^r \mathrm{d}x\to 0 \quad (m\to\infty). \tag{13.4}$$

定理 13.1 $\Phi\triangleq K_r\{M_p\}$是完备的赋可列范空间.

为了证明这个定理，我们先证明下列引理.

引理 若 $\varphi_{0,0}=0$, p.p.，则对一切$|\alpha|\leqslant p$，$\varphi_{0,\alpha}=0$, p.p..

证： 由赫尔德 (Hölder)不等式和 (13.4)，对任意 $\psi\in\mathscr{D}$，当 $m\to\infty$时，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|[D^\alpha\varphi_m(x)-\varphi_{0,\alpha}(x)]\psi(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha\varphi_m(x)-\varphi_{0,\alpha}(x)|^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\to 0,$$

于是 $$\int_{\mathbf{R}^n} D^\alpha\varphi_m(x)\psi(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^n}\varphi_{0,\alpha}(x)\psi(x)\mathrm{d}x.$$

对左边分部积分得

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_m(x)D^\alpha\psi(x)\mathrm{d}x$$
$$\longrightarrow(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_{0,0}(x)D^\alpha\psi(x)\mathrm{d}x.$$

由极限唯一性得

$$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_{0,\alpha}(x)\psi(x)\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_{0,0}(x)D^\alpha\psi(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_{\mathbf{R}^n}[\varphi_{0,\alpha}(x)-D^\alpha\varphi_{0,0}(x)]\psi(x)\mathrm{d}x=0.$$

因此，在分布意义内有

$$\varphi_{0,\alpha}=D^\alpha\varphi_{0,0}. \qquad \text{▯} \tag{13.5}$$

现在证明定理．由(13.5)知 Φ_p 的元素能恒等于 C^∞ 函数 ψ，这里 ψ 的一切阶数不大于 p 的分布导数也是 r 次幂在 $\mathbf{R}^n$ 上关于测度 $M_p(x)\mathrm{d}x$ 可积的函数．若 $p\geqslant n$，则应用第二章(9.11)式于 $D^\alpha\varphi_m-D^\alpha\varphi_k$ 可知，序列$\{D^\alpha\varphi_m(x)\}$在$|\alpha|\leqslant p-n$时是一致收敛的，从而 $\varphi_{0,0}$ 属于 $\mathbf{R}^n$ 上的可微性类 C^{p-n}．于是，若 $\varphi\in\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\Phi_p$，则在 $\mathbf{R}^n$ 上 $\varphi\in C^\infty$．因为 $D^\alpha\varphi=[D^\alpha\varphi]$，进而满足

$$\int_{\mathbf{R}^n}M_p(x)|D^\alpha\varphi(x)|^r\mathrm{d}x<\infty,$$

即 $\varphi\in\Phi=K_r\{M_p\}$，所以 $\Phi=\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\Phi_p$．由第一章定理3.1知 Φ 是完备的．

其次，若 $\varphi\in\Phi$，则

$$\|\varphi\|_{1,r}\leqslant\|\varphi\|_{2,r}\leqslant\cdots\leqslant\|\varphi\|_{p,r}\leqslant\cdots.$$

最后，证明任意两个范数列$\{\|\cdot\|_{p,r}\}$及$\{\|\cdot\|_{q,r}\}$是和谐的．证

明方法类似于第二章§3引理2．事实上，设$\{\varphi_m\}\subset\Phi$，$\|\varphi_m\|_{q,r}\to0$，而且$k\geqslant m\to\infty$时，$\|\varphi_m-\varphi_k\|_{p,r}\leqslant\varepsilon_m\to0$，记$\{D^\alpha\varphi_m\}$在$\Phi_p$内的极限函数为$\varphi_{0,\alpha}$．由于$\|\varphi_m\|_{q,r}\to0$，$M_q\geqslant1$，于是对任意紧集$N\subset\mathbf{R}^n$，有：

$$\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi_m(x)|^r\mathrm{d}x\to0\quad(m\to\infty).$$

与(13.4)比较，对$\alpha=0$得$\varphi_{0,0}=0$ p.p.，从而由引理知$\varphi_{0,\alpha}=0$ p.p.，而且(3.3)式变为

$$\|\varphi_m\|_{p,r}\to0\ (m\to\infty).\quad\square$$

应用第二章(9.11)式能进而证明：若M_p满足第二章§3的条件(P)，则$K_r\{M_p\}$是完全空间．

第二章§9的结果也能推广到空间$K_r\{M_p\}$中．于是在定理9.1的推广中，在Γ^r内将上确界范数换为

$$\|\theta\|=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\left[\int_{\mathbf{R}^n}[M_p(x)]^{1-r}|\theta_\alpha(x)|^r\mathrm{d}x\right]^{1/r},$$

而第二章的(9.4)式代替为

$$L(\theta)=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{\mathbf{R}^n}\theta_\alpha(x)g_\alpha(x)\mathrm{d}x,\tag{13.6}$$

这里$g_\alpha(x)$为可测函数，而且

$$\|L\|^s=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{\mathbf{R}^n}M_p(x)|g_\alpha(x)|^s\mathrm{d}x<\infty.\tag{13.7}$$

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right)$$

而在(13.6)内令$\theta_\alpha=\psi_\alpha=M_pD^\alpha\varphi$得

$$(f,\varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{\mathbf{R}^n}M_p(x)D^\alpha\varphi(x)g_\alpha(x)\mathrm{d}x.\tag{13.8}$$

取$f_\alpha=(-1)^{|\alpha|}g_\alpha(x)$，即得下列定理：

定理 13.2 $K_r\{M_p\}$上的任意广义函数f都有下列形式：对某个$p\geqslant1$，

$$f=\sum_{|\alpha|\leqslant p} D^{\alpha}[M_p(x)f_{\alpha}(x)], \tag{13.9}$$

这里 f_{α} 为可测函数，使得

$$\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{\mathrm{R}^n} M_p(x)|f_{\alpha}(x)|^s\mathrm{d}x<\infty.\ \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right) \tag{13.10}$$

f 在 Φ_p 上的范数等于(13.10)左边的 s 次根.

2.空间(D_{L^p})

本节剩余部分赋予一切 $M_p(x)\equiv 1$ 的特殊情形，这里 $p\geqslant 1$. 记 $K_r\{1\}=(D_{L^r})(1\leqslant r<\infty)$，即$(D_{L^p})(1\leqslant p\leqslant\infty)$由一切其所有导数属于 $L^p(\mathrm{R}^n)$的 C^{∞} 函数组成，(D_{L^p})的拓扑由下列零的邻域组成：

$$V(m,\varepsilon)\triangleq\{\varphi|\ 对于|\alpha|\leqslant m,\ \|D^{\alpha}\varphi\|_p<\varepsilon\}, \tag{13.11}$$

这里$\|\psi\|_p$ 表示 ψ 的 L^p 范数，即

$$\|\psi\|_p=\left[\int_{\mathrm{R}^n}|\psi(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}.$$

这一拓扑与由可列个范数

$$\|\varphi\|_{m,p}\triangleq\left[\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^{\alpha}\varphi\|_p\right]^{1/p} \tag{13.12}$$

定义的拓扑一致. 显然(D_{L^p}) 是赋可列范空间.

令$(B)=(D_{L^{\infty}})$，而且记$(\dot{B})$由(B)内一切满足下列条件的函数组成：它们及它们的各阶导函数在$|x|\to\infty$ 时都一致收敛于 0. 显然，$(\dot{B})$是(B)的子空间.

定理13.3 $\mathscr{D}$在$(\dot{B})$内稠密，也在(D_{L^p}) 内稠密$(1\leqslant p<\infty)$.

证： 令

$$\alpha_j(x)=\int_{|y|<j+1/2}\rho_{\varepsilon}(x-y)\mathrm{d}y,\quad \varepsilon=\frac{1}{4} \tag{13.13}$$

这里 ρ_{ε} 是由 (2.1) 式所确定的球形函数，则 $\alpha_j\in\mathscr{D}$，而且当 $|x|\leqslant j$ 时，$\alpha_j(x)=1$；当 $|x|\geqslant j+1$ 时，$\alpha_j(x)=0$. 又在 R^n 上，$|D^q\alpha_j|\leqslant B_q$，这里 B_q 是与 j 无关的常数. 显然，若 $\varphi\in(D_{L^p})$ $(1\leqslant p<\infty)$ 或若 $\varphi\in(\dot{B})$，则依次有 $\alpha_j\varphi\to\varphi$ 在(D_{L^p}) 或 $(\dot{B})$内成立. 因为 $\alpha_j\varphi\in\mathscr{D}$，

所以定理成立. □

定理 13.4 $\mathscr{D}\subset(D_{L^p})\subset(D_{L^q})\subset(\dot{B})$ $(p\leqslant q<\infty)$.

证: 命题"$(D_{L^q})\subset(\dot{B})$"可以在第二章(9.11)中用 $D^\alpha\varphi$ 代替 φ,从而断定 $|x|\to\infty$ 时 $D^\alpha\varphi(x)\to 0$ 而推出.

对充分大的 $|x|$,若 $\varphi\in(D_{L^p})$,则 $|D^\alpha\varphi(x)|<1$,从而 $|D^\alpha\varphi(x)|^q\leqslant|D^\alpha\varphi(x)|^p$. 因此 $p\leqslant q<\infty$ 时,有 $(D_{L^p})\subset(D_{L^q})$. □

对于 $1<p\leqslant\infty$, $(D_{L^{p'}})$ 的共轭空间记为 (D'_{L^p}), 这里 $p'=p/(p-1)$;$(\dot{B})$ 的共轭空间记为 (D'_{L^1}),而且空间 (D'_{L^∞}) 也记为 (B'). 因为 $\mathscr{D}$ 在 $(\dot{B})$ 内稠密,而且 $1\leqslant q<\infty$ 时也在 (D_{L^q}) 内稠密,于是 (D'_{L^p}) $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 的元素能一对一地恒等于一个 $\mathscr{D}$ 上的线性泛函,这个泛函在 $1<p\leqslant\infty$ 时,对于 $\mathscr{D}$ 上赋予 $(D_{L^{p'}})$ 的拓扑连续. 因为 $\mathscr{D}$ 的拓扑强于 $(\dot{B})$ 和 (D_{L^q}) 的拓扑,所以 (D'_{L^p}) 的元素是分布. 同理,若 $p\leqslant q$,则可以证明 (D'_{L^p}) 的元素能恒同于 (D'_{L^q}) 的元素,也恒等于 (B') 的元素. 于是我们有:

$$(D'_{L^p})\subset(D'_{L^q})\subset(B')\subset\mathscr{D}'\quad(p\leqslant q<\infty). \tag{13.14}$$

定义 13.1 若分布 T 属于 (B'),则称 T 为**有界分布**. 若 $T_j\to 0$ 在 (B') 的强拓扑内成立,则称 $T_j\to 0$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致成立.

显然

$$(D_{L^p})\subset L^p\subset(D'_{L^p})\quad(1<p\leqslant\infty). \tag{13.15}$$

而且若 $T\in(D'_{L^p})$,则对任意 α, $D^\alpha T\in(D'_{L^p})$. 因此 $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}D^\alpha f_\alpha\in(D'_{L^p})$ 对一切 $f_\alpha\in L^p$ 成立. 反之也成立,即有如下定理:

定理 13.5 若 $T\in(D'_{L^p})$ $(1<p\leqslant\infty)$,则 T 等于 L^p 内函数的导函数的线性组合.

此定理是定理 13.2 的特例.

由定理 13.5 和(10.2), $1/p+1/q-1\geqslant 0$ 时,若 $S\in(D'_{L^p})$, $T\in(D'_{L^q})$,我们能定义卷积 $S*T$,卷积属于 (D'_{L^r}), 这里 $1/r=1/p+1/q-1$. 不难证明: 从 $(D'_{L^p})\times(D'_{L^q})$ 到 (D'_{L^r}) 的映射 $(S,T)\mapsto S*T$

是连续的．细节留给读者．

§14 周期分布

我们以概述周期分布来结束本章．周期分布是周期函数的推广，它的许多性质是分布的对应性质的发展．我们先建立周期基本函数概念．为简单计，只在一维空间中讨论．

1．周期基本函数空间 P_T

我们已知，若 $f(x)$ 是普通函数，如果存在正数 T，使得 $f(x)=f(x-T)$对一切 x 的值成立，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为它的周期．注意这里 $T>0$．仿此有

定义 14.1 具有周期的 C^∞函数称为**周期基本函数**，一切有公共周期 T 的基本函数的全体记为 P_T(T 是正实常数)．

P_T 依通常线性运算显然是线性空间．若 $x\in P_T$，令

$$\|x\|_p=\max_{|\alpha|\leqslant p}|D^\alpha x(t)|, \tag{14.1}$$

这里 p 是非负整数．容易验证，$\|x\|_p$ 是范数，从而 P_T成为赋可列范空间．它显然是基本空间．

易证，空间 P_T 内元素序列$\{x_n(t)\}$收敛于 $x(t)$的充要条件是：对每一个非负整数 k，序列$\{x^{(k)}(t)\}$对一切 t，一致收敛于 $x^{(k)}(t)$(通常，序列的一致收敛性对每一个固定的 k 保持，而不必对一切k保持)，从而 $x(t)\in P_T$．

定义 14.2 若函数 $\xi(t)\in\mathscr{D}$，而且存在实数 T 使

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi(t-nT)=1 \tag{14.2}$$

成立，则称 $\xi(t)$为**酉函数**．关于某一个固定实数 T 的一切酉函数的空间记为 $\mathscr{U}_T$．$\mathscr{U}_T$ 显然不空．

定理 14.1 $\mathscr{D}$内任一基本函数 φ 都可通过等式

$$\theta(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(t-nT) \tag{14.3}$$

产生 P_T 内唯一的基本函数 θ. 反之，P_T 内每一个函数 θ 都能由 $\mathscr{D}$ 内某个函数 φ 通过(14.3)式产生.

证：因 φ 具有有界支集，所以在 t 的任意有限区间内，(14.3)内的和式只有有限多个非零项，于是可以逐项微分得

$$\theta^{(k)}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi^{(k)}(t-nT),\quad k=1,2,\cdots. \tag{14.4}$$

此外，若 $\varphi_\nu\to\varphi(\mathscr{D})$，而且关于每个 φ_ν 通过(14.3)式得到 P_T 内的 θ_ν，则显然有 $\theta_\nu\to\theta(P_T)$，于是 $\theta\in P_T$.

反之，若 $\theta\in P_T$ 而且 $\xi\in\mathscr{U}_T$，则由于在 t 的任意有限区间内(14.2)内的和式只有有限多项，我们可以逐项微分得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi^{(k)}(t-nT)=0,\quad k=1,2,\cdots. \tag{14.5}$$

于是 $\xi\theta\in\mathscr{D}$. 又 $\theta_\nu\to\theta(P_T)$，则 $\xi\theta_\nu\to\xi\theta(\mathscr{D})$. 因为 θ 的周期性，每个 θ 按照(14.3)式有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi(t-nT)\theta(T-nT)$$

$$=\theta(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi(t-nT)=\theta(t). \tag{14.6}$$

所以 θ 可以由 $\xi\theta$ 通过(14.3)产生. $\square$

2. 周期分布空间 P'_T

周期分布可以仿周期函数同样定义.

定义14.3 设 f 为分布，若存在正实数 T，对任意 $\varphi\in\mathscr{D}$ 成立等式

$$(f(t),\varphi(t))=(f(t-T),\varphi(t)), \tag{14.7}$$

则称 f 为**周期分布**，T 称为 $f(t)$ 的周期．(14.7)式也时常写为

$$f(t)=f(t-T).\tag{14.8}$$

像普通函数一样，只要 f 有一个周期 T，它就有无限多个周期 $nT(n=1,2,\cdots)$．显然，常数分布是周期分布，每个正实数都是它的一个周期．

定义14.4 设 T 是给定的(固定)正实数，一切以 T 为周期的周期分布组成的空间记为 P'_T．

为了证明 P'_T 的每个元素可以恒等于空间 P_T 上的一个连续线性泛函，对于任意 $\theta\in P_T$(为了避免混淆起见)，我们把 f 作用于 θ 所得的(复)数记为 $\langle f,\theta\rangle$，而把 $\varphi\in\mathscr{D}$ 时 f 作用于 φ 所得的复数记为 $f\cdot\varphi$ 或 (f,φ)．我们定义：

$$\langle f,\theta\rangle=(f,\xi\theta),\tag{14.9}$$

这里 ξ 是任意酉函数．

为了证明 f 的线性与连续性，我们先证明(14.9)与 ξ 的选取无关，即在(14.9)的右边以任意 $\mathscr{U}_T$ 内的函数代替 ξ 时保持不变，即有

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t)\xi(t-nT).\tag{14.10}$$

事实上，这个和在任意有限开区间上只有有限项，对于任意 $\varphi\in\mathscr{D}$ 都有

$$\left(\sum_n f(t)\xi(t-nT),\varphi(t)\right)=\left(f(t),\varphi(t)\sum_n\xi(t-nT)\right)$$
$$=(f(t),\varphi(t)).$$

现在令 ξ 与 η 是 $\mathscr{U}_T$ 内的任意两个元素，由 $f(t)=f(t+nT)$ 及(14.10)，对任意 $\theta\in P_T$，有

$$(f,\xi\theta)=\left(\sum_n f(t)\eta(t-nT),\ \xi(t)\theta(t)\right)$$
$$=\sum_n(f(t)\eta(t-nT)\xi(t),\theta(t))$$

$$= \sum_{n} (f(t+nt)\eta(t)\xi(t+nT), \theta(t))$$

$$= \Big(\sum_{n} f(t)\xi(t+nT), \eta(t)\theta(t) \Big)$$

$$= (f, n\theta(t)).$$

可以像通常一样来定义 f 的线性与连续性，即若对于任意 θ_1，$\theta_2 \in P_T$ 以及复数 α 与 β，有

$$\langle f, \alpha\theta_1 + \beta\theta_2 \rangle = \alpha \langle f, \theta_1 \rangle + \beta \langle f, \theta_2 \rangle,$$

则称 f 为空间 P_T 上的**线性泛函**. 类似地，若对任意序列$\{\theta_\nu\} \subset P_T$，都有 $\theta_\nu \to \theta(P_T)$时数列 $\langle f, \theta_\nu \rangle \to \langle f, \theta \rangle$，则称 f 是空间 P_T 上的连续泛函. 有了以上准备，我们才可以证明下述结论.

定理 14.2 若 f 是周期为 T 的周期分布，则(14.9)确定 f 为空间 P_T 上的连续线性泛函.

证： 任取 $\theta_1, \theta_2 \in P_T$ 和二复数 α, β，则

$$\langle f, \alpha\theta_1 + \beta\theta_2 \rangle = (f, \xi(\alpha\theta_1 + \beta\theta_2))$$

$$= \alpha(f, \xi\theta_1) + \beta(f, \xi\theta_2) = \alpha \langle f, \theta_1 \rangle + \beta \langle f, \theta_2 \rangle.$$

又，若 $\theta_\nu \to \theta(P_T)$，则 $\xi\theta_\nu \to \xi\theta(\mathscr{D})$. 因此，当 $\nu \to \infty$ 时

$$\langle f, \theta_\nu \rangle = (f, \xi\theta_\nu) \to (f, \xi\theta) = \langle f, \theta \rangle.$$

所以，f 是 P_T 上的连续线性泛函. □

至此，我们已经从周期为T 的周期分布导出 P_T 上的连续线性泛函. 另一方面，我们也能从 P_T 上的连续线性泛函导出一个周期为T 的周期分布，使(14.9)保持正确，作法如下：

任取 $\varphi \in \mathscr{D}$，则由表达式(14.3)能产生$\theta \in P_T$. 于是由 f 作为 P_T 上的泛函. 我们由下式定义数(f, φ)：

$$(f, \varphi) = \langle f, \theta \rangle, \tag{14.11}$$

则(14.11)定义的 f 为$\mathscr{D}$上的泛函. 此外，因为 $\varphi(t)$与 $\varphi(t+T)$通过(14.3)产生同一 $\theta(t)$，我们有

$$(f(t), \varphi(t)) = \langle f(t), \theta(t) \rangle$$

$$=(f(t),\varphi(t+T)).\tag{14.12}$$

现在我们证明

定理14.3 若f是空间P_T上的连续线性泛函,而且θ与φ有关系(14.3),则(14.11)确定f为周期是T的周期分布.

证: 设$\theta_\nu\in P_T$, $\varphi_\nu\in\mathscr{D}$而且$\theta_\nu$与$\varphi_\nu$有关系(14.3),则由

$$\begin{aligned}(f,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)&=\langle f,\alpha\theta_1+\beta\theta_2\rangle\\&=\alpha\langle f,\theta_1\rangle+\beta\langle f,\theta_2\rangle\\&=\alpha(f,\varphi_1)+\beta(f,\varphi_2),\end{aligned}$$

于是f是$\mathscr{D}$上的线性泛函.

为了证明f在$\mathscr{D}$上的连续性,假定$\varphi_\nu\to\varphi(\mathscr{D})$,则由定理14.1及(14.3)知,$\theta_\nu\to\theta(P_T)$,因为$\theta\in P_T$而且$f$是$P_T$上的连续泛函,于是

$$(f,\varphi_\nu)=\langle f,\theta_\nu\rangle\longrightarrow\langle f,\theta\rangle=(f,\varphi).$$

最后,(14.12)证明了f是周期为T的周期分布. □

注:实际上,定义(14.9)与(14.11)一致,因为(14.3)及$f(t)=f(t+nT)$,于是对于任意$\xi\in\mathscr{U}_T$,我们有

$$\begin{aligned}&(f,\xi\theta)\\&=(f(t),\ \xi(t)\sum_n\varphi(t-nT))\\&=\sum_n(f(t),\xi(t)\varphi(t-nT))\\&=\sum_n(f(t+nT),\xi(t+nT)\varphi(t))\\&=(f(t),\varphi(t)\sum_n\xi(t+nT))\\&=(f,\varphi).\end{aligned}$$

于是导出下列推论:

系 若对于每一个 $\theta\in P_T$，$\langle f,\theta\rangle=\langle g,\theta\rangle$，则 P'_T 内两个分布 f 与 g 相等.

证： 由(14.3)与(14.11)，对任意 $\varphi\in\mathscr{D}$得

$$(f,\varphi)=\langle f,\theta\rangle=\langle g,\theta\rangle=(g,\varphi),$$

所以 $f=g$. □

例 14.1 设 f 是周期为 T 的局部可积周期函数，则对于任意 $\theta\in P_T$，$\xi\in\mathscr{U}_T$，任取实数 a，我们有

$$\begin{aligned}\langle f,\theta\rangle&=(f,\xi\theta)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\xi(t)\theta(t)\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{a+nT}^{a+nT+T}f(t)\xi(t)\theta(t)\mathrm{d}t\\&=\sum_{n}\int_{a}^{a+T}f(t+nT)\xi(t+nT)\theta(t+nT)\mathrm{d}t\\&=\int_{a}^{a+T}f(t)\theta(t)\ \sum_{n}\xi(t+nT)\mathrm{d}t\\&=\int_{a}^{a+T}f(t)\theta(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

（上述等式中和与积分的交换也是由于和中只有有限多项）于是 $\langle f,\theta\rangle$可以简单地记为函数 $f(t)\theta(t)$ 在任意长为 T 的有限区间上的积分，从而 f 可以认为是正则周期分布.

例 14.2 设

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT),\quad T>0.$$

显然，$\delta_T\in P'_T$. 对于 $\theta\in P_T$，$\xi\in\mathscr{U}_T$，有

$$\begin{aligned}\langle\delta_T,\theta\rangle&=(\delta_T,\xi\theta)\\&=\Big(\sum_{n}\delta(t-nT),\xi(t)\theta(t)\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_n \xi(nT)\theta(nT)$$

$$= \theta(0) \sum_n \xi(nT).$$

因为$\sum_n \xi(nT) = 1$，所以得

$$\langle \delta_T(t), \theta(t) \rangle = \theta(0).$$

类似地可证：

$$\langle \delta_T(t-a), \theta(t) \rangle = \theta(a). \quad (\forall a \in \mathbf{R}^1)$$

例 14.3 更一般地，考察

$$\delta_T^{(k)} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(t-nT), \quad k=0,1,2,\cdots$$

则有 $\delta_T^{(k)}(t) \in P'_T$，而且如前得

$$\langle \delta_T^{(k)}, \theta \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} [\xi(t)\theta(t)] \Big|_{t=nT}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \xi^{(p)}(nT)\theta^{(k-p)}(nT)$$

$$= (-1)^k \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \theta^{(k-p)}(0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi^{(p)}(nT).$$

由(14.2)与(14.4)得

$$\langle \delta_T^{(k)}, \theta \rangle = (-1)^k \theta^{(k)}(0). \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

空间 P'_T 内的收敛性可用通常方法定义.

定义 14.5 设序列$\{f_\nu\} \subset P'_T$，f 是 P_T 上的泛函. 若对每个 $\theta \in P_T$，总有

$$\langle f_\nu, \theta \rangle \to \langle f, \theta \rangle, \tag{14.13}$$

则称序列$\{f_\nu\}$**收敛**于 f，记为

$$f_\nu \to f(P'_T) \quad \text{或} \quad \lim_{\nu\to\infty} f_\nu = f(P'_T).$$

由这个定义可推出 f 也是 P'_T 的元素，即下列定理成立：

定理 14.4 空间 P'_T 关于收敛性封闭. 换句话说，若 $f_\nu \to f$ (P'_T)，则 $f \in P'_T$.

证： 对每个 $\varphi \in \mathscr{D}$，有 $\theta \in P_T$ 使 φ 与 θ 有关系(14.3). 用(14.11)，依条件得

$$\langle f_\nu, \varphi \rangle = \langle f_\nu, \theta \rangle \longrightarrow \langle f, \theta \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

于是 $\{f_\nu\}$ 在 $\mathscr{D}'$ 内收敛. 因为 $\mathscr{D}'$ 关于收敛性封闭，故它的极限 $g \in \mathscr{D}'$. 此外，由于每个 f_ν 是周期为 T 的分布，所以 g 也是 P'_T 内周期为 T 的周期分布，因此 $g \in P'_T$ 而且 $\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \theta \rangle$. 又由(14.11)知 $\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \theta \rangle$，结果 $\langle g, \theta \rangle = \langle f, \theta \rangle$，而且每一个 $\theta \in P_T$ 都能通过(14.3)由 $\mathscr{D}$ 内的某个 φ 产生，于是对每个 $\theta \in P_T$ 都有 $\langle g, \theta \rangle = \langle f, \theta \rangle$. 由定理 14.3 的系得 $f = g$，即 $f \in P'_T$. □

定理 14.5 $f_\nu \to f(P'_T)$ 的充要条件为：$f_\nu \to f(\mathscr{D}')$.

证： 必要性在以上定理的证明中已证，只证充分性. 若条件满足，则由定理 14.4，$f \in P'_T$，于是对于 $\xi \in \mathscr{U}_T$ 与 $\theta \in P_T$，得

$$\langle f_\nu, \theta \rangle = \langle f_\nu, \xi\theta \rangle \longrightarrow \langle f, \xi\theta \rangle = \langle f, \theta \rangle. \quad □$$

如通常一样，我们也可以说无限级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ 的部分和序列 $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu (n = 1, 2, \cdots)$ 在 P'_T 内收敛时该级数在 P'_T 内收敛.

3. 周期分布的运算

我们现在列出空间 P'_T 内的一些运算. 因为 P'_T 的元素是由 $\mathscr{D}'$ 的元素定义的，而 $\mathscr{D}'$ 内的有关运算前边已经定义，所以完全等价的定义能借助于 P'_T 内的元素作用于 P_T 内的元素给定. 下边定义理解为 f 和 g 是 P'_T 内的分布，而每个等式对一切 $\theta \in P_T$ 成立. P'_T 关于这些运算的封闭性同 $\mathscr{D}'$ 内定义的一致性证明留给读者.

(1) 周期分布的加法：

$$\langle f+g,\theta\rangle=\langle f,\theta\rangle+\langle g,\theta\rangle. \tag{14.14}$$

(2) 周期分布与常数 a 的乘法：

$$\langle af,\theta\rangle=a\langle f,\theta\rangle. \tag{14.15}$$

因为 P'_T 关于上述两种运算封闭，所以能证明 P'_T 是线性空间.

(3) 周期分布的位移(设 τ 是实数)：

$$\langle f(t-\tau),\theta(t)\rangle=\langle f(t),\theta(t+\tau)\rangle. \tag{14.16}$$

(4) 周期分布的微分法：

$$\langle f',\theta\rangle=-\langle f,\theta'\rangle. \tag{14.17}$$

重复作下去得

$$\langle f^{(k)},\theta\rangle=(-1)^k\langle f,\theta^{(k)}\rangle\quad(k=1,2,\cdots). \tag{14.18}$$

(5) 周期分布的反射：

$$\langle f(-t),\theta(t)\rangle=\langle f(t),\theta(-t)\rangle. \tag{14.19}$$

(6) P'_T 的分布 f 与 P_T 内周期基本函数 ρ 的乘法：

$$\langle\rho f,\theta\rangle=\langle f,\rho\theta\rangle. \tag{14.20}$$

注意，微分法是在下列意义下的空间 P'_T 内的连续线性运算：对于线性，若 $f,g\in P'_T$，α,β 是复数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+\beta\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}.$$

对于连续性，若 $f_\nu\to f(P'_T)$，则 $f'_\nu\to f'(P'_T)$，于是(P'_T)内的任意收敛的无限级数都能逐项微分. 类似命题关于上面列出的其它运算也可作出.

第四章　广义函数的傅里叶变换

傅里叶变换理论是数学分析的重要部分之一，但运用傅里叶方法通常受到一定的限制，即对函数在无穷远处的增长率有一定的限制（对急速增长的函数一般说来难于应用傅里叶方法）. 对于空间 $\mathscr{D}$ 而言，由于其中函数的支集有界，所以广义函数在自变数趋于无限大时函数增长情况没有变化，但从傅里叶变换的角度来看，空间 $\mathscr{D}$ 内函数的傅里叶变换不在 $\mathscr{D}$ 内而在另一空间 Z 内，也不方便. 如果利用广义函数作为工具，就可以处理一类相当广泛的函数的傅里叶变换，因此把傅里叶方法的应用范围扩大.

广义函数论里研究傅里叶变换的方法是先研究基本函数的傅里叶变换，然后用广义函数论的基本方法将它自动地转移于广义函数. 因为基本函数具有很强的规律性，所以这个方法可以减少或避免通常的傅里叶变换理论中遇见的解析上的困难.

对于傅里叶变换理论最为合适的基本空间为空间（S）及其子空间. 我们从基本空间 $\mathscr{D}$ 的傅里叶变换开始，然后即讨论空间（S）的傅里叶变换，再讨论较一般的基本函数的傅里叶变换. 从 §4 开始，我们讨论广义函数的傅里叶变换，§5 到 §6 我们把 §2 内的卷积定理推广到较一般情形，这些内容初读时可以略去. 至于进一步的研究，特别是应用方面的，建议读者去阅读参考文献 33，35，47，48 或 54 的任何一本.

§1　基本空间 $\mathscr{D}$ 的傅里叶变换

在本节中关于概念和结果的陈述都是对于多元函数来进行

的，但是证明只限于一元函数的情况，读者可自行推广到多元函数.

1.**基本函数的傅里叶变换**

我们先来考察 $\mathscr{D}$ 空间中函数的傅里叶变换. 为了书写简单，当 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 时，记 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$. 当 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$，记 $x\cdot\sigma=\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma_j$；当 $q=(q_1,\cdots,q_n)$ 时，记 $\sigma^q=\sigma_1^{q_1}\cdots\sigma_n^{q_n}$.

定义 1.1 设 $\varphi(\cdot)\in\mathscr{D}$，令

$$\psi(\sigma)=\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\cdot x}\mathrm{d}x, \tag{1.1}$$

称它是 $\varphi(\cdot)$ 的**傅里叶变换**（注：我们这里定义的傅里叶变换是 L^1-傅里叶变换），记为 $\Phi(\cdot)$ 或 $F(\varphi)$. 也称映射 F：$\varphi\mapsto\Phi$ 为 $\varphi(\cdot)$ 的傅里叶变换. 又称它的逆映射 F^{-1} 为**傅里叶逆变换**，记为

$$F^{-1}(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}f(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma\cdot x}\mathrm{d}\sigma. \tag{1.2}$$

我们把 $\mathscr{D}$ 中函数的傅里叶变换全体所成的线性空间记为 $Z=F\mathscr{D}$. 又在 Z 中引进极限概念如下：设 $F(\varphi_n)\in Z$, $F(\varphi)\in Z$，那么当 $\varphi_n\to\varphi(\mathscr{D})$ 时，称函数列 $\{F(\varphi_n)\}$ 在 Z 中**收敛**于 $F(\varphi)$，记为 $F(\varphi_n)\to F(\varphi)\ (Z)$.

定理 1.1（基本函数的傅里叶变换的基本性质）

(1) 对任一多项式 P 和 $\varphi\in\mathscr{D}$，有

$$P(D)F(\varphi)=F(P(\mathrm{i}(\cdot))\varphi),\text{①} \tag{1.3}$$

$$P(\cdot)F(\varphi)=F(P(\mathrm{i}D)\varphi), \tag{1.4}$$

这里 $P(D)$ 表示求导运算 $\sum_{N(q)\leqslant p}c_qD^q$.

---

①式中 $\mathrm{i}(\cdot)$ 表示复数 i 与积分变量的乘积，而不具体写出变量，参看第二章定义5.1后面的注.

(2) 当 $\varphi,\psi\in\mathscr{D}$ 时，记 $(\varphi,\psi)_{\mathscr{D}}=\int\varphi\bar{\psi}\mathrm{d}x$. 当 $f,g\in Z$ 时,记 $(f,g)_Z=\int f\bar{g}\mathrm{d}x$,则

$$(2\pi)^n(\varphi,\psi)_{\mathscr{D}}=(F(\varphi),F(\psi))_Z. \tag{1.5}$$

设 $t=(t_1,\cdots,t_n)$，算子 τ_t: $\varphi(\cdot)\mapsto\varphi((\cdot)+t)$ 既可以看成是 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的算子,又可以看成 $Z\to Z$ 的算子,而且

$$F(\tau_t\varphi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\cdot)\cdot t}F(\varphi),\quad \tau_tF(\varphi)=F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot(\cdot)}\varphi). \tag{1.6}$$

证：(1.3),(1.6)可以通过直接计算而得，(1.4) 可以通过分部积分得到,(1.5)可由(1.2)得到. □

现在我们来研究基本函数空间 Z .

定理 1.2 函数 $\psi(\cdot)\in Z$ 的充要条件是 ψ 可以解析开拓为 n 维复空间上的整函数①,而且有正数 a,使得对一切非负整数组 $q=(q_1,\cdots,q_n)$,有

$$|s^q\psi(s)|\leqslant c_q\mathrm{e}^{a|\tau|}, \tag{1.7}$$

其中 c_q 为与 q 和 ψ 有关的常数，$s=\sigma+\mathrm{i}\tau$②．又 $\psi_m\to 0\,(Z)$ 的充要条件是存在正数 a，使得对每个非负整数组 $q=(q_1,\cdots,q_n)$,存在常数 c_q 满足不等式

$$|s^q\psi_m(s)|\leqslant c_q\mathrm{e}^{a|\tau|},m=1,2,\cdots;s=\sigma+\mathrm{i}\tau \tag{1.8}$$

同时,函数列 $\{\psi_m(\sigma)\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的任一有界区域中一致收敛于零.

证：只讨论一元函数情况. 设 $\psi\in Z$，就是说有 $\varphi\in\mathscr{D}$ 使得 $\psi\in F(\varphi)$. 又设 φ 的支集在 $|x|\leqslant a$ 中. 由于

---

① 对于多元复变函数 $\psi(s_1,\cdots,s_n)$,如果

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(s_1,\cdots,s_k+h,\cdots,s_n)-\psi(s_1,\cdots,s_n)}{h}$$

存在，则称 $\frac{\partial\psi}{\partial s_k}$ 存在. 如果在一个 n 维的复区域 D 中函数 ψ 是连续的，而且 $\frac{\partial\psi}{\partial s_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$存在，则称 ψ 在此区域中是解析的。这时整函数、解析开拓等概念和单复变函数情况相仿。

② $s=(s_1,\cdots,s_n)$是复数组,$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$和 $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n)$是实数组.

$$\psi(\sigma)=\int_{-a}^{a}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx,$$

而 $\psi(s)=\int_{-a}^{a}\varphi(x)e^{isx}dx$ 显然是复变数 $s=\sigma+i\tau$ 的整函数，因此 $\psi(\sigma)$ 可以解析开拓为整函数 $\psi(s)$. 由(1.4)容易知道，对任何非负整数 q，有

$$\begin{aligned}|s^q\psi(s)|&=\left|\int_{-a}^{a}i^q\varphi^{(q)}(x)e^{isx}dx\right|\\&\leqslant\int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|e^{-x\tau}dx\\&\leqslant\int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|dx e^{a|\tau|}.\end{aligned}$$

因此(1.7)成立，其中 $c_q=\int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|dx$.

反过来，如果整函数 $\psi(s)$ 满足(1.7)，记 $c=c_0+c_2$，那么由(1.7)可知

$$|\psi(s)|\leqslant\frac{c}{1+|s|^2}e^{a|\tau|},\quad s=\sigma+i\tau. \tag{1.9}$$

我们作函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

利用围道积分和(1.9)，容易证明对任何实数 τ，有

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma+i\tau)e^{-i(\sigma+i\tau)x}d\sigma. \tag{1.10}$$

取 τ 使 $\tau x=-|\tau x|$，再利用(1.9)就得到估计式

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{ce^{\tau x+a|\tau|}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{1+|\sigma+i\tau|^2}\leqslant c'e^{-|\tau|(|x|-a)},$$

此处 $c'=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{1+\sigma^2}$ 是和 τ, x 都无关的常数. 令 $|\tau|\to+\infty$，就知道当 $|x|>a$ 时 $\varphi(x)=0$. 因此 $\varphi(x)$ 的支集是有界的. 利

用(1.7)和(1.10)可以证明

$$\varphi^{(q)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-\mathrm{i}s)^{q}\psi(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}\sigma.$$

因此函数 $\varphi(\cdot)$ 是无限次可微的，这样便有 $\varphi\in\mathscr{D}$. 容易证明这时 $F(\varphi)=\psi$，因此 $\psi\in Z$.

由以上证明过程可以看出，如果 $\{\psi_m\}\subset Z$, $\psi_m=F(\varphi_m)$ 而且(1.8)成立，那么$\{\varphi_m\}$的支集都含在$|x|\leqslant a$中. 又因为

$$|\varphi_m^{(q)}(x)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^{q}\psi_m(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}\,\mathrm{d}\sigma\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma|\geqslant R}c_{q+2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^{2}}+\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\sigma^{q}|\psi_m(\sigma)|\mathrm{d}\sigma.$$

对任何 $\varepsilon>0$，取 R 使 $\frac{1}{2\pi}c_{q+2}\frac{2}{R}<\frac{\varepsilon}{2}$. 如果$\{\psi_m(\sigma)\}$又在有界区间中一致收敛于零，再取 m 充分大，使

$$\int_{-R}^{R}\sigma^{q}|\psi_m(\sigma)|\mathrm{d}\sigma<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\pi,$$

就知道$\{\varphi_m^{(q)}(x)\}$一致收敛于零，即 $\varphi_m\to 0(\mathscr{D})$. 反过来，当 $\varphi_m\to 0(\mathscr{D})$时，记 $\psi_m=F(\varphi_m)$，也容易证明 ψ_m 应当满足定理中的条件. □

2. Z 空间上的连续线性泛函

由于 Z 空间也是一个线性空间，其中有极限运算而且线性运算是连续的，因此我们可以像对 $\mathscr{D}$ 空间那样考察 Z 空间上的连续线性泛函——广义函数.

定义 1.2 称 Z 空间上的连续线性泛函是 Z 空间上的广义函数，其全体也称为**广义函数空间**，记为 Z^* 或 Z'.

在 Z^* 中可以仿照 $\mathscr{D}^*$ 中定义线性运算、求导运算和极限运算. 这些我们不详细叙述，由读者自行补充. 我们仿照空间 $\mathscr{D}^*$ 中的情况，设 $g\in Z^*$，如果存在局部勒贝格可积函数 $g(\sigma)$，使得对每个 $\psi\in Z$，函数 $\psi(\cdot)g(\cdot)$在 R^n 上是勒贝格可积的，而且

$$(g,\psi)=\int_{R^n} g(\sigma)\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\quad \psi\in Z$$

那么称 g 是**正则泛函**.

Z 空间有与 $\mathscr{D}$ 不同的地方. 由于 $\psi\in Z$ 时 ψ 的定义域为复空间,所以我们可以把广义函数表示成复空间上解析函数的积分.

例 1.1 考察 n 元函数: 设 s_0 是任意一组复数 $(s_{01}, s_{02}, \cdots, s_{0n})$, 记 $\delta(\cdot - s_0)$ 为泛函

$$(\delta(\cdot - s_0),\psi)=\psi(s_0),\quad \psi\in Z.$$

这个泛函显然属于 Z^*, 也称它是 **δ 函数**. 当 s_0 是一组实数时, $\delta(\cdot - s_0)$ 显然不是正则泛函. 但一般说来, 对任一 s_0, $\delta(\cdot - s_0)$ 可以用复空间中函数的积分来表达. 我们只就一元函数来说明这点. 设 s_0 是一个复数, 任取一个以 s_0 为中心的正向的圆周形围道 L, 由柯西积分公式就得到

$$(\delta(\cdot - s_0),\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(s)}{s-s_0}\mathrm{d}s.$$

现在我们考虑更一般的用复空间上积分表示的广义函数.

设 L 是 n 维复空间中的一个光滑的 n 维曲面, 这曲面以 $(u_1, \cdots, u_n)$ 为参数. 设 $s=s(u)$ 为曲面的参数方程, 记 $\det\left(\frac{\partial s_i}{\partial u_j}\right)(i, j=1,2,\cdots,n)$ 是变换

$$(u_1,\cdots,u_n)\mapsto(s_1,\cdots,s_n)$$

的雅科比(Jacobi)行列式. 令

$$\mathrm{d}s=\det\left(\frac{\partial s_i}{\partial u_j}\right)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

设 g 是 L 上的一个函数, 它使得函数 $u\mapsto g(s(u))$ 是勒贝格可测的, 而且对每个 $\psi\in Z$, $\psi(s(\cdot))g(s(\cdot))$ 是 R^n 上的勒贝格可积函数, 那么当

$$(g,\psi)=\int_L g(s)\psi(s)\mathrm{d}s,\quad \psi\in Z$$

是 Z 上的连续线性泛函时，就称这个泛函是**解析泛函**．如例 1.1 中所述 $\delta(\cdot - s_0)$ 是解析泛函，正则泛函也是解析泛函．下面我们将看出解析泛函可以用来表达微分方程的解．

例 1.2 现在讨论一元函数组的一类解析函数．设 $P(s)$ 是一个复变数 s 的 m 次多项式，设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是它的 m 个零点．记 $r_k = \mathrm{Im}\alpha_k, k = 1, 2, \cdots, m$．任取实数 $\tau, \tau \neq r_k, k = 1, 2, \cdots, m$．我们作一元基本函数空间 Z 上的解析泛函 g_τ 如下：

$$(g_\tau, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\sigma + \mathrm{i}\tau)}{P(\sigma + \mathrm{i}\tau)} \mathrm{d}\sigma.$$

注意，这个解析泛函和 τ 的位置有关．如果 $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$，利用围道积分可知，当 $r_k < \tau < r_{k+1}$ 时，g_τ 与 τ 无关，把这个泛函记为 $g_{(k)}$，$g_{(0)}$ 表示当 $\tau < r_1$ 时的 g_τ，g_m 表示当 $\tau > r_m$ 时的 g_τ．这时

$$\begin{aligned}
&(g_{(k+1)}, \psi) - (g_{(k)}, \psi) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\sigma + \mathrm{i}\tau_{k+1})}{P(\sigma + \mathrm{i}\tau_{k+1})} \mathrm{d}\sigma - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\sigma + \mathrm{i}\tau_k)}{P(\sigma + \mathrm{i}\tau_k)} \mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}$$

其中 $r_k < \tau_k < r_{k+1} < \tau_{k+1} < r_{k+2}$．由于在直线 $\tau = \tau_k$ 与 $\tau = \tau_{k+1}$ 之间，函数 $\dfrac{\psi(s)}{P(s)}(s = \sigma + \mathrm{i}\tau)$ 只有一个一次极点 α_{k+1}，利用留数定理可知

$$(g_{(k+1)}, \psi) - (g_{(k)}, \psi) = -2\pi\mathrm{i} \frac{\psi(\alpha_{k+1})}{P'(\alpha_{k+1})},$$

$$g_{(k+1)} - g_k = -2\pi\mathrm{i} \frac{1}{P'(\alpha_{k+1})} \delta(\cdot - \alpha_{k+1}).$$

也就是说，它不为零．因此，尽管相应于同一函数 $\dfrac{1}{P(s)}$，由于积分路径不一样，所得的解析泛函一般也不一样．这个例暂时讨论到这里．

现在来讨论 Z^* 空间上的乘法运算．我们令 $\xi(s)$ 为 n 维复空

间上的整函数，而且存在正数 a，b 和 c，使得

$$|\xi(s)|\leqslant c(|s|^{b}+1)e^{a|\tau|},\quad s=\sigma+i\tau,$$

其中 $|s|=\sqrt{|s_1|^2+\cdots+|s_n|^2}$．这种函数全体记为 Y．显然当 $\xi\in Y,\psi\in Z$ 时，$\xi\psi\in Z$，即 ξ 是 Z 的一个乘子，Y 是 Z 空间的乘子空间．完全类似于 $\mathscr{D}^*$ 与 E 的乘法运算，可以定义 Z^* 与 Y 的乘法运算．显然任一多项式都在 Y 中，因此多项式是 Z^* 的乘子．

例 1.2(续)　容易看出，对任意 k，

$$(Pg_{(k)},\psi)=(g_{(k)},P\psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma+i\tau_k)\,d\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\psi(\sigma)d\sigma.$$

因此

$$Pg_{(k)}=1,\quad k=0,1,2,\cdots,m.\tag{1.11}$$

所以对给定的 P，方程 $Pg=0$ 在 Z^* 中至少有 m 个线性无关的解

$$g=g_{(0)}+\sum_{k=1}^{m}c_k(g_{(k)}-g_{(0)}).\tag{1.12}$$

事实上，可以证明这就是方程 $Pg=1$ 在 Z^* 中的通解．

3. 广义函数的傅里叶变换概念

在这一段中，当 f，$g\in L^2(\mathrm{R}^n)$ 时，不管 f，g 是实的还是复的，我们都用 (f,g) 表示积分

$$\int f(x)g(x)dx\text{①}.$$

我们又作 $L^2(\mathrm{R}^n)$ 中的算子 J 如下：

$$J:\ \varphi(\cdot)\mapsto\varphi(-(\cdot)),$$

或记作 $\check{\varphi}(\cdot)=\varphi(-(\cdot))$．

我们首先注意当 $f\in\mathscr{D}$ 时，f 可以看成 $\mathscr{D}^*$ 中的广义函数，这时由(1.5)得到

① 积分号下不标明积分域时，表示在全空间上的积分，下同．

$$(2\pi)^n(f,J\varphi)=(2\pi)^n\int f(x)J\varphi(x)\mathrm{d}x=(2\pi)^n(f,\overline{\overline{J\varphi}})_z$$

$$=(F(f),F(\overline{J\varphi}))_z=(F(f),\overline{F(\overline{J\varphi})})$$

$$=(F(f),F(\varphi)).$$

因此，如果把 $F(f)$ 看成 $\mathbf{Z}$ 空间上的连续线性泛函，那么有公式

$$(2\pi)^n(f,J\varphi)=(F(f),F(\varphi)),\varphi\in\mathscr{D}. \tag{1.13}$$

事实上，这个公式对一切 $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 也成立．利用这个公式我们定义广义函数的傅里叶变换如下：

定义 1.3　设 $f\in\mathscr{D}^*$，作 Z 上的连续线性泛函：

$$F(f):\ \psi\mapsto(2\pi)^n(f,JF^{-1}(\psi)),\psi\in Z. \tag{1.14}$$

称它是广义函数 f 的**傅里叶变换**，有时也记为 $\hat{f}$．我们也把映射 $F:\ f\mapsto F(f),f\in\mathscr{D}^*$ 称做（广义函数空间 $\mathscr{D}^*$ 上的）傅里叶变换，它的逆映射 F^{-1} 称做（广义函数空间 Z^* 上的）**傅里叶逆变换**．

显然(1.14)等价于(1.13)．因此，我们也可以把(1.13)看成广义函数的傅里叶变换的定义公式．另外，对于任意 $g\in Z^*$，我们可以作 $\mathscr{D}^*$ 中的广义函数

$$f:\ \varphi\mapsto(2\pi)^{-n}(g,F(J\varphi)).$$

这时 $(f,J\varphi)=(g,F(\varphi)),\varphi\in\mathscr{D}$，因此 $g=F(f)$．所以有

定理 1.3（广义函数的傅里叶变换的基本性质）　$\mathscr{D}^*$ 中的傅里叶变换

$$F:\ f\mapsto F(f),\ f\in\mathscr{D}^*$$

是 $\mathscr{D}^*$ 到 Z^* 上的一对一的连续线性算子．它有如下的性质：

(1) 对任一多项式 P 及 $f\in\mathscr{D}^*$ 有

$$P(D)F(f)=F(P(\mathrm{i}(\cdot))f), \tag{1.3$'$}$$

$$P(\cdot)F(f)=F(P(\mathrm{i}D)f). \tag{1.4$'$}$$

(2) 设 $t=(t_1,\cdots,t_n)$，作 τ_t 的共轭算子 τ'_t：$f\to\tau'_tf$，其中

$$(\tau'_tf,\varphi)=(f,\tau_t\varphi),$$

那么

$$F(\tau'_tf)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\cdot)\cdot t}F(f)=F(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\cdot)\cdot t}f),f\in\mathscr{D}^*. \tag{1.6$'$}$$

证：我们只证(1.2′)，其余留给读者证明. 当 $\varphi\in\mathscr{D}$ 时，由(1.3)、(1.13)和第二章中的(6.9)，我们有

$$\begin{aligned}&(P(D)F(f),F(\varphi))=(F(f),P(-D)F(\varphi))\\&=(F(f),F(P(-\mathrm{i}(\cdot))\varphi))=(2\pi)^n(f,J(P(-\mathrm{i}(\cdot))\varphi))\\&=(2\pi)^n(f,P(\mathrm{i}(\cdot)J\varphi))=(2\pi)^n(P(\mathrm{i}(\cdot)f,J\varphi)\\&=(F(P(\mathrm{i}(\cdot))f),F(\varphi)).\end{aligned}$$

因此(1.2′)成立. □

下面再来考察 n 元广义函数的傅里叶变换的例.

例1.3 $F(\delta)=1, F(1)=(2\pi)^n\delta.$ (1.15)

证：事实上，一方面，如果记 $\psi(\cdot)=F(\varphi)$，$\varphi\in\mathscr{D}$，那么由(1.13)有

$$\begin{aligned}(F(\delta),\psi)&=(2\pi)^n(\delta,J\varphi)=(2\pi)^n(J\varphi)(0)\\&=(2\pi)^n\varphi(0).\end{aligned}$$

由普通函数的傅里叶逆变换的公式有

$$\varphi(0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

因此 $(F(\delta),\psi)=(1,\psi)$，这就得到 $F(\delta)=1$. 另一方面，又有

$$\begin{aligned}(F(1),\psi)&=(2\pi)^n(1,J\varphi)=(2\pi)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\&=(2\pi)^n\psi(0)=((2\pi)^n\delta,\psi).\quad\square\end{aligned}$$

利用(1.15)和(1.2′)，(1.3′)可知对于多项式 $P(\cdot)$ 成立着

$$F(P(x))=(2\pi)^nP\left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\right)\delta(\sigma),$$

$$F\left(P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\delta(x)\right)=P(-\mathrm{i}\sigma).\tag{1.16}$$

我们又可以把(1.15)中的第二式推广成

$$F(e^{b\cdot x})=(2\pi)^n\delta(s-ib). \tag{1.17}$$

事实上，由于 $e^{b\cdot x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b\cdot x)^n}{n!}$，这个级数是在任一有限区域上一致收敛的，因此，作为广义函数级数它也是收敛的。当 $\psi=F(\varphi),\varphi\in\mathscr{D}$时，利用(1.13)，(1.16)得到

$$(F(e^{b\cdot x}),\psi)=(2\pi)^n(e^{b\cdot x},J\varphi)=(2\pi)^n\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b\cdot x)^m}{m!},J\varphi\right)$$

$$=(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}((b\cdot x)^m,J\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(F((b\cdot x)^m),\psi)$$

$$=(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\left(-i\left(b\cdot\frac{d}{d\sigma}\right)\right)^m\delta(\sigma),\psi(\sigma)\right)$$

$$=(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(ib\cdot D)^m\psi(\delta)\Big|_{\delta=0}.$$

利用多元解析函数的泰勒公式，上式又等于

$$(2\pi)^n\psi(ib)=(2\pi)^n(\delta(s-ib),\psi(s)).$$

下面我们写出常用的一元广义函数的傅里叶变换的一个简表：

广义函数 $f(x)\in\mathscr{D}^*$	傅里叶变换 $\tilde{f}(\sigma)\in Z^*$
$f(x)\in L(-\infty,+\infty)$	$\tilde{f}(\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix\sigma}dx$
$\delta(x-a)$	$e^{ia\sigma}$
e^{bx}	$(2\pi)^n\delta(s-ib)$
$x^n,n=0,1,2,\cdots$	$2\pi\left(-i\frac{d}{d\sigma}\right)^n\delta(\sigma)$
$\frac{1}{x}$	$i\pi\ \mathrm{sign}\ \sigma$

$\dfrac{1}{x^2}$	$-\lvert\sigma\rvert\pi$
$\ln\lvert x\rvert$	$\mathrm{i}\left[(\sigma+\mathrm{i}0)^{-1}\left(c+\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}-\ln(\sigma+\mathrm{i}0)\right)-(\sigma-\mathrm{i}0)^{-1}\left(c-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}-\ln(\sigma-\mathrm{i}0)\right)\right]$ 其中 $c=\int_0^{+\infty}\ln x\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$
$\theta(x)$	$\dfrac{\mathrm{i}}{\sigma}+\pi\delta(\sigma)$
$\sin x$	$\mathrm{i}\pi[\delta(\sigma-1)-\delta(\sigma+1)]$
$\cos x$	$\pi[\delta(\sigma+1)+\delta(\sigma-1)]$

§2 基本空间S的傅里叶变换

1. 急减函数的傅里叶变换

定义 2.1 对任意 $\varphi\in S$，我们称

$$(F\varphi)(\xi)\triangleq\tilde{\varphi}(\xi)\triangleq\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

为 φ 的**傅里叶变换**. 这里 $x\cdot\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$.

注：因为 $\varphi\in S$，所以积分

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\left|\varphi(x)\right|\mathrm{d}x$$

一致绝对收敛. 从而(2.1)式有意义.

定理 2.1 设 $\varphi\in S$，则

$$\tilde{\check{\varphi}}=\overline{\tilde{\varphi}}, \tag{2.2}$$

$$\widetilde{\tau_a\varphi}=e^{-ia\xi}\tilde{\varphi},\tag{2.3}$$

这里 $\check{\varphi}(x)=\varphi(-x)$, $\tau_a\varphi(x)=\varphi(x+a)$。

证: 只证明(2.3)。

$$\widetilde{\tau_a\varphi}=\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\tau_a\varphi\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\varphi(x+a)\mathrm{d}x$$

$$=e^{-ia\cdot\xi}\int_{\mathbf{R}^n}e^{i(x+a)\cdot\xi}\varphi(x+a)\mathrm{d}x=e^{-ia\xi}\tilde{\varphi}.\qquad\square$$

定理 2.2 设 $\varphi\in S$,则

$$\widetilde{ix_j\varphi}=\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi_j},\quad\widetilde{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}=-i\xi_j\tilde{\varphi}.\tag{2.4}$$

证: 将(2.1)两边对 ξ_j 求导,并注意到可以把求导移到积分号内便得

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi_j}=\int_{\mathbf{R}^n}ix_je^{ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x=\widetilde{ix_j\varphi}.$$

又由分部积分得

$$\widetilde{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}=\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x$$

$$=-i\xi_j\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x=-i\xi_j\tilde{\varphi}.\qquad\square$$

系 若 $P(D)\triangleq\sum a_\alpha D^\alpha$ 是 $D=(D_1,\cdots,D_n)$ 的多项式,则

$$P(D)\tilde{\varphi}(\xi)=F(P(ix)\varphi(x)),\tag{2.5}$$

$$F(P(D)\varphi(x))=P(-i\xi)\tilde{\varphi}(\xi).\tag{2.6}$$

定理 2.3 傅里叶变换确定一个从 S 到 S 内的连续线性映射.

证: 由定理 2.2 的系可知 $\tilde{\varphi}$ 无穷可微. 又对任意 $\varphi\in S$,

$$\xi^\alpha D^\beta\tilde{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}D^\alpha[x^\beta\varphi(x)]\mathrm{d}x.$$

因为 $D^\alpha(x^\beta\varphi(x))\in S$,于是对所有整数 $k\geqslant0$,

$$(1+|x|^2)^k|D^\alpha(x^p\varphi(x))| \tag{2.7}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 内一致有界. 如果取 k, 使

$$\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^k}\mathrm{d}x=C<\infty, \tag{2.8}$$

即得不等式

$$\begin{aligned}\left|\xi^\alpha D^p\hat{\varphi}(\xi)\right| &\leqslant \int_{\mathbf{R}^n}\left|D^\alpha x^p\varphi(x)\right|\mathrm{d}x \\ &=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^k}(1+|x|^2)^k|D^\alpha(x^p\varphi)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\cdot\sup_{x\in\mathbf{R}^n}(1+|x|^2)^k|D^\alpha(x^p\varphi(x))|.\end{aligned} \tag{2.9}$$

这就证明了对每个 α 和 p, $\xi^\alpha D^p\hat{\varphi}(\xi)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 内一致有界, 于是 $\hat{\varphi}\in S$. 另一方面, 上述不等式还证明, 如果 $\varphi_j\to 0(S)$, 则 $(\hat{\varphi}_j)\to 0(S)$. 因此 F: $S\to S$ 是一个连续线性映射. □

定义 2.2 若 $\psi\in S$, 则积分

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\psi(x)\mathrm{d}x \tag{2.10}$$

是绝对收敛的, 并定义一个变量为 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的 S 中的函数, 称为 ψ 的**傅里叶逆变换**, 记作 $(F^{-1}\psi)(\xi)$.

可以证明, 如定理 2.3 一样, F^{-1} 确定一个从 S 到 S 内的连续线性映射. 容易证明下列关系式成立:

$$\widetilde{F\psi}=(2\pi)^n\,\overline{F^{-1}\bar{\psi}} \quad 和 \quad F\bar{\psi}=(2\pi)^n\,\widetilde{\overline{F^{-1}\psi}}. \tag{2.11}$$

定理 2.4(傅里叶反演公式) 对任意 $\varphi\in S$, 有

$$\varphi=F^{-1}(\hat{\varphi}),\quad \varphi=F(F^{-1}\varphi).$$

证: 由富比尼定理, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi \\ &=\int_{\mathbf{R}^n}\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\varphi(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(y-x)\cdot\xi}\psi(\xi)\varphi(y)\,d\xi\,dy$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\psi}(y-x)\varphi(y)\,dy. \tag{2.12}$$

作变量代换，将(2.12)式变为

$$\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi)\psi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\psi}(y)\varphi(x+y)\,dy. \tag{2.13}$$

用 $\psi(\varepsilon\xi)$ 代替 $\psi(\xi)$，它的傅里叶变换等于 $\varepsilon^{-n}\tilde{\psi}(y/\varepsilon)$. 再由变量代换，得

$$\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi)\psi(\varepsilon\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\psi}(y)\varphi(x+\varepsilon y)\,dy.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$，得

$$\psi(0)\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi = \varphi(x)\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\psi}(y)\,dy. \tag{2.14}$$

现在取 $\psi(x) = e^{-|x|^2/2}$，并由

$$\tilde{\psi}(y) = (2\pi)^{n/2}e^{-|y|^2/2}$$

以及高斯积分

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|x|^2/2}\,dx = (2\pi)^{n/2}$$

即得

$$\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi = (2\pi)^n\varphi(x). \tag{2.15}$$

同理
$$F(F^{-1}\psi) = \psi. \quad \Box$$

系 傅里叶变换确定一个从 S 到 S 上的拓扑同构.

定理 2.5 傅里叶变换有下列性质：若 $\varphi,\psi\in S$，则

(1) $\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}\psi\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi\tilde{\psi}\,dx$;

(2) 巴赛瓦尔公式：

$$\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}\cdot\overline{\tilde{\psi}}\,dx = (2\pi)^n\int_{\mathbf{R}^n} \varphi\cdot\bar{\psi}\,dx;$$

(3) 卷积的傅里叶变换：$\widetilde{\psi*\varphi} = \tilde{\psi}\cdot\tilde{\varphi}$;

(4) 乘积的傅里叶变换：$\widetilde{\psi\cdot\varphi}=(2\pi)^{-n}\tilde{\varphi}*\tilde{\psi}$.

证： (1) 在(2.13)式内令 $x=0$ 即可.

(2) 由(1)和(2.11)式及定理 2.3 得

$$\int_{\mathbf{R}^n} F\varphi\cdot\overline{F\psi}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\cdot F(\overline{F\psi})\,\mathrm{d}x$$

$$=(2\pi)^n\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\cdot\overline{F^{-1}(F\psi)}\mathrm{d}x=(2\pi)^n\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\cdot\bar{\psi}\mathrm{d}x.$$

(3) 由富比尼定理得

$$\int_{\mathbf{R}^n}(\varphi*\psi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi}\varphi(y)\psi(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\psi(x-y)\mathrm{d}x\right)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$=\tilde{\psi}(\xi)\cdot\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi}\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\tilde{\varphi}(\xi)\cdot\tilde{\psi}(\xi).$$

(4) 由傅里叶反演公式和富比尼定理得

$$\widetilde{\varphi\cdot\psi}=\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\psi(x)\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\eta}\,\tilde{\varphi}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}x$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi-\eta)}\psi(x)\tilde{\varphi}(\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\eta$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi-\eta)}\psi(x)\mathrm{d}x\right\}\tilde{\varphi}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\psi}(\xi-\eta)\,\tilde{\varphi}(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$==(2\pi)^{-n}(\tilde{\varphi}*\tilde{\psi})(\xi).\qquad\square$$

2. 缓增广义函数的傅里叶变换

由定理 2.4 的系知傅里叶变换是一个从 S 到 S 上的同构. 这就启发我们可以利用对偶性来定义缓增广义函数的傅里叶变换如下:

定义 2.3 设 $T\in S^*$, 它的傅里叶变换 FT 或 $\hat{T}$ 由下式定义: 对一切 $\varphi\in S$,

$$\hat{T}\equiv FT(\varphi)\triangleq T\cdot F\varphi. \tag{2.16}$$

因为 F: $S\to S$ 是线性连续的, 所以(2.16) 式右边有意义, 而上式所定义的 F 也是在 S^* 的强拓扑意义下从 S^*到 S^*内的连续映射. 事实上, 是同构于 F 的转置算子. 当 $T=f\in S$ 时, 由定理 2.5 的(1)及第二章定理 5.2, 这里定义和(2.1)的定义一致. 因此我们用同一记号 F 来表示 S 中元素的傅里叶变换或者缓增广义函数的傅里叶变换.

同样地, 利用对偶性来定义缓增广义函数的逆傅里叶变换.

定义 2.4 对一切 $\varphi\in S$,

$$F^{-1}T\cdot\varphi\triangleq T\cdot F^{-1}\varphi. \tag{2.17}$$

显然, 在 S^* 的强拓扑意义下 F^{-1} 是一个从 S^*到 S^* 内的连续线性映射, 并且傅里叶反演公式

$$T=F^{-1}(FT)=F(F^{-1}T),\quad T\in S^*$$

成立. 因此, F 是一个从 S^* 到 S^* 的拓扑同构. 定理 2.1 与定理 2.2 及(2.5), (2.6) 式对于这里的广义函数的傅里叶变换也成立.

定理 2.6 设 $T\in S^*$, 则

$$P(D)F(T)=F(P(\mathrm{i}x)T), \tag{2.18}$$

$$F(P(D)T)=P(-\mathrm{i}\xi)FT, \tag{2.19}$$

这里 $P(D)=\sum a_\alpha D^\alpha$ 是 D 的多项式.

证: 因为多项式是 S 内的乘子, 所以等式右边存在. 又由 (2.5), (2.6)得

$$\begin{aligned}(P(D)FT)\varphi&=FT(P(-D)\varphi)=T\cdot F(P(-D)\varphi)\\&=T(P(\mathrm{i}x)F\varphi)=(P(\mathrm{i}x)T)F\varphi\end{aligned}$$

$$= [F(P(\mathrm{i}x)T)]\varphi.$$

$$F(P(D)T)\varphi = P(D)T(F\varphi) = T(P(-D)F\varphi)$$
$$= T[F(P(-\mathrm{i}\xi)\varphi)] = (FT)(P(-\mathrm{i}\xi))\varphi$$
$$= (P(-\mathrm{i}\xi)FT)\varphi. \quad \square$$

验证包含广义函数的傅里叶变换等式时，通常是先验证这些等式对于 S 内的函数成立，然后由 S 在 S^* 内的稠密性，依连续性推广到 S^* 内广义函数的等式．例如

$$T(T_x \otimes T_y) = FT_x \otimes FT_y. \tag{2.20}$$

3. 卷积定理

在定理 2.5 中我们讨论了函数的乘积与卷积的傅里叶变换．对于广义函数而言，乘积不常有意义（第二章 § 6），但是可讨论卷积．为了推广卷积定理（定理 2.5 中的（3），（4）），我们引进空间 (O_M) 与 (O_c')．

定义 2.5 (O_M) 由满足下列条件的一切 C^∞ 函数所组成：对每个 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in \mathrm{N}^n$，存在多项式 $P_p(x)$，使得

$$|D^p\varphi(x)| \leqslant |P_p(x)| \quad (x\in \mathrm{R}^n). \tag{2.21}$$

我们称 (O_M) 是在无限远处缓增的 C^∞ 函数组成的空间．

定理 2.7 设 $\varphi\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$，则下列条件互相等价：

(1) 对每个 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in \mathrm{N}^n$，存在多项式 $P_p(x)$，使得

$$|D^p\varphi(x)| \leqslant |P_p(x)|, \quad x\in \mathrm{R}^n;$$

(2) 对所有 $f\in S$，乘积 $\varphi f\in S$；

(3) 对每个 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in \mathrm{N}^n$ 和每个 $f\in S$，函数 $D^p\varphi\cdot f$ 在 R^n 内有界．

证： (1) $\Longrightarrow$ (2)．由莱布尼兹公式，有

$$D^p(\varphi f) = \sum_{|q|\leqslant p} \frac{p!}{q!(p-q)!} D^q\varphi \cdot D^{p-q}f,$$

于是

$$(1+|x|^2)^k D^p(\varphi\cdot f)$$
$$= \sum_{|q|\leqslant p} \frac{p!}{q!(p-q)!} D^q\varphi\cdot(1+|x|^2)^k D^{p-q}f,$$

这里 k 是一个正整数. 由(1),存在正整数 N,使得

$$|D^q\varphi(x)|\leqslant C(1+|x|^2)^N. \quad (x\in\mathbf{R}^n,\ |q|\leqslant p)$$

作适当代换,可得

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\sup_{|p|\leqslant m}|(1+|x|^2)^k D^p(\varphi\cdot f)(x)|$$
$$\leqslant C\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\sup_{|p|\leqslant m}|(1+|x|^2)^{k+N}D^p f(x)|,$$

再由 $f\in S$ 即知上述不等式表明 $f\varphi\in S$.

(2)$\Longrightarrow$(3). 因为 $D_j\varphi\cdot f=D_j(\varphi\cdot f)-\varphi\cdot D_j f, 1\leqslant j\leqslant n$, 又由 $f\in S$ 及条件(2)知 $\varphi\cdot D_j f\in S$, 于是 $D_j\varphi\cdot f\in S$. 再由莱布尼兹公式和归纳法得 $D^p\varphi\cdot f\in S$,于是(3)成立.

(3)$\Longrightarrow$(1). 用反证法. 设条件(1)不成立,则对某个 $p=(p_1,\cdots,p_n)$,任何多项式都不是$(D^p\varphi)$的界. 由归纳法,必有 $\mathbf{R}^n$ 中的序列$\{x_j\}$使得 $|x_j+1|\geqslant|x_j|+2$,并且

$$|D^p\varphi(x_j)|>(1+|x_j|^2)^j.$$

令
$$\gamma(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha(x-x_j)}{(1+|x_j|^2)^j},$$

这里 $\alpha\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使得 $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $\mathrm{supp}\alpha$ 含于半径为 1 的开球内,而且 $\alpha(0)=1$. 由于函数 $\alpha(x-x_j)$ 的支集互不相交, 这个和式有意义. 若 $k\in\mathbf{N}, p\in\mathbf{N}^n$, 则有

$$(1+|x|^2)^k D^p\gamma(x)=\frac{(1+|x|^2)^k D^p\alpha(x-x_j)}{(1+|x_j|^2)^k(1+|x_j|^2)^{j-k}}.$$

这里 $|x_j|-1\leqslant|x|\leqslant|x_j|+1$. 另一方面,

$$\frac{1+|x|^2}{1+|x_j|^2}\leqslant C,$$

这里 C 是适当的常数,而且

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|D^p\alpha(x-x_j)|=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|D^p\alpha(x)|.$$

于是 $\gamma(x)\in S$. 但是显然有

$$|\gamma(x)D^p\varphi(x_j)|>\alpha(0)=1,\quad j=1,2,\cdots.$$

这和条件(3)矛盾. □

(O_M)的局部拓扑可由一族半范数

$$r_{f,p}(\varphi)=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)\cdot D^p\varphi(x)|$$

决定. 这里 $f\in S$ 而 $p\in\mathbf{N}^n$. 显然这一拓扑不具有可数基.

$\alpha_j\longrightarrow 0((O_M))$ 的充要条件是: 对每个 $p\in\mathbf{N}^n$ 和每个 $f\in S$, $f(x)D^p\alpha_j(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛于 0, 或等价地, 对每个 $f\in S$, $f\alpha_j$在 S 内收敛于 0.

定义 2.6 若对任意 $k\geqslant 0$, $(1+|x|^2)^kT$ 都是有界广义函数(即它属于(B'), 见第三章 §6), 则称 T 为**在无限远处急减的广义函数**. 一切在无限远处急减的广义函数组成的空间记为 (O'_c)或 O^*_c.

若对任意 $k\geqslant 0$, 总有$(1+|x|^2)^kT_j\to 0(B')$, 则称 $T_j\to 0(O'_c)$.

定理 2.8 T 属于(O'_c)的充要条件是: 对每个 $k\geqslant 0$, T 表示为(在 $\mathscr{D}$ 上)

$$T=\sum_{|\alpha|\leqslant p}D^\alpha f_\alpha. \tag{2.22}$$

这里 f_α 是可测函数, 而且$(1+|x|^2)^kf_\alpha(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 内是本性有界函数(p 依赖于 k).

证: 若对任意 $k\geqslant 0$(2.22)式成立, 则对于任意 $h\geqslant 0$,

$$(1+|x|^2)^hT=\sum_{|\alpha|\leqslant p}(1+|x|^2)^h D^\alpha f_\alpha,$$

而且当 $k\geqslant h$ 时, 每项在(B')内, 因为

$$\int_{\mathbf{R}^n}f_\alpha(x)D^\alpha[(1+|x|^2)^h\varphi(x)]\,\mathrm{d}x$$

是(D_{L^1})上的连续线性泛函. 反之, 设 $T\in(O'_c)$, 则对任意 $k\geqslant 0$,

$$(1+|x|^2)^kT\in(B'),$$

而且由第三章定理 4.5, 有

$$(1+|x|^2)^kT=\sum_{|\alpha|\leqslant q}D^\alpha g_\alpha,$$

这里 g_α 是本性有界函数，记

$$(1+|x|^2)^{-k}DD^\beta g_\alpha$$
$$=D[(1+|x|^2)^{-k}D^\beta g_\alpha]-[D(1+|x|^2)^{-k}D^\beta g_\alpha, \qquad (2.23)$$

则记 $D^\beta g_\alpha=DD^{\beta-1}g_\alpha$，而且用同样方法处理 (2.23) 右边的每个方括号，则继续减少 g_α 的导函数，最后得 $\Sigma D^\gamma h_{\alpha\gamma}$，这里

$$(1+|x|^2)^k h_{\alpha\gamma}$$

是本性有界函数. □

由定理 2.7 知，若 $\alpha\in(O_M)$，则 α 是空间 S 内的乘子. 因此，若 $T\in S^*$，则 $\alpha T\in S^*$，于是有下列定理：

定理 2.9

(1) 若 $\alpha_j\longrightarrow\alpha(O_M)$ 而且 $T\in S^*$，则 $\alpha_jT\longrightarrow\alpha T(S^*)$；

(2) 若 $T_j\longrightarrow T(S^*)$ 而且 $\alpha\in(O_M)$，则 $\alpha T_j\longrightarrow\alpha T(S^*)$.

证：因 S 是完全空间（见第二章 §3），于是 S^* 内的强收敛等价于弱收敛（第一章 § 6 定理 6.4）. 不妨假定(1)内的 $\alpha=0$，(2)内的 $T=0$，则只须证明：

若 $\alpha_j\longrightarrow0(O_M)$，则 $\alpha_jT\cdot\varphi\longrightarrow0 \quad (\varphi\in S)$. (2.24)

若 $T_j\longrightarrow0(S^*)$，则 $\alpha T_j\varphi\longrightarrow0 \quad (\varphi\in S)$. (2.25)

而(2.24)可由 $j\longrightarrow\infty$ 时 $\alpha_j\varphi\longrightarrow0(S)$ 证得. (2.25)可由 $\alpha\varphi\in S$ 而且 $j\longrightarrow0$ 时，$T_j\cdot\alpha\varphi\longrightarrow0$ 证得. □

定理 2.10 (1) 若 $S\in(O'_c)$，$T\in S^*$，则表示式

$$S*T\cdot\varphi\triangleq S_\xi\cdot[T_\eta\cdot\varphi(\xi+\eta)]$$

对 $\varphi\in S$ 有意义，而且 $S*T\in S^*$；

(2) 若 $S_j\longrightarrow S(O'_c)$，则 $S_j*T\longrightarrow S*T(S^*)$；

(3) 若 $T_j\longrightarrow T(S^*)$，则 $S*T_j\longrightarrow S*T(S^*)$.

证：(1) 由第二章定理 9.3，有

$$T_\eta=D^\beta[(1+|\eta|^2)^mF(\eta)],$$

这里 $F(\eta)$ 是连续有界函数. 令

$$I(\xi)=T_\eta\cdot\varphi(\xi+\eta),$$

这里 φ 属于 S 内的任意有界集 B，则有

$$D^q I(\xi)=(-1)^{|\beta|}\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\eta|^2)^m F(\eta)D^{\beta+q}\varphi(\xi+\eta)\mathrm{d}\eta.$$

用不等式

$$1+|\eta|^2\leqslant C_1(1+|\xi|^2)(1+|\xi+\eta|^2),$$

而且对一切 $\varphi\in B$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|D^{\beta+q}\varphi(x)|(1+|x|^2)^m\,\mathrm{d}x\leqslant C'_q,$$

于是我们得到

$$|D_\xi^q I(\xi)|\leqslant B_q(1+|\xi|^2)^m, \qquad (2.26)$$

这里 C'_q, B_q 是与 B 内的 φ 无关的常数.

记 $S_\xi\cdot[T_\eta\cdot\varphi(\xi+\eta)]$为下式

$$(1+|\xi|^2)^h S_\xi\left(\frac{I(\xi)}{(1+|\xi|^2)^h}\right), \qquad (2.27)$$

而且由(2.26)，当 $h>m+n/2$ 时，

$$\psi(\xi)=I(\xi)(1+|\xi|^2)^{-h}$$

属于(D_{L^1})，然而对任意 h，$(1+|\xi|^2)^h S$ 属于 (D_{L^1}) 的共轭空间 (B')，从而我们得到下列结论：(2.27)有意义，而且，事实上当 $\varphi\in B$时，(2.27)组成一个有界数集. 所以，由本定理中 $(S*T)\varphi$ 的符号，$(S*T)\varphi$ 有意义，而且 $S*T$ 是 S 上的连续线性泛函.

(2) 不妨设 $S=0$. 用 $(1+|\xi|^2)^h S_j\cdot\psi$ 代替 (2.27)，而且由(O'_c)内的收敛性定义知$(1+|\xi|^2)^h S_j\longrightarrow 0(B')$，于是对于 S 内有界集的一切元素 φ，$S*T\cdot\varphi\longrightarrow 0$ 一致成立(关于 φ 的一致性不必成立，因为 S 是完全空间，S^* 内的弱收敛蕴涵强收敛). 因此 $S_j*T\longrightarrow 0(S^*)$.

(3) 用第二章定理 9.3，可仿(2)的思路证明，细节略. □

我们取 $T*S\cdot\varphi=T_\eta\cdot[S_\xi\cdot\varphi(\xi+\eta)]$，则定理 2.10 仍成立，即若 $T\in S^*, S\in(O'_c)$，则 $T*S\in S^*$，而且 $T*S$ 在定理 2.10 的意义下

连续. 因为当 S 或 T 有紧支集时 $S*T=T*S$,于是我们得

$$S*T=S*T,\ T\in S^*,\ S\in(O'_c).$$

我们现在推广卷积定理如下:

定理 2.11 (1) 若 $\alpha\in(O_M)$, $U\in S^*$, 则 $F\alpha\in(O'_c)$, $FU\in S^*$,而且

$$F(\alpha U)=F\alpha*FU. \tag{2.28}$$

(2) 若 $T\in(O'_c)$,$U\in S^*$, 则 $FT\in(O_M)$,$FU\in S^*$,而且

$$F(T*U)=FT\cdot FU. \tag{2.29}$$

证: 由(2.18)和(2.19),易证 F 映(O_M) 到(O'_c)内. 事实上,设 $\varphi\in(O_M)$,又设 m 是一个整数,使得 $m>n/2$. 由(O_M) 的定义,对每个整数 $k\geqslant 0$,存在充分大的整数 N, 使得

$$|(1-\Delta)^k\varphi(x)|\leqslant C(1+|x|^2)^{N-m},\ x\in\mathrm{R}^n$$

这里 Δ 是拉普拉斯(Laplace) 算子$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. 令

$$h(x)=\frac{(1-\Delta)^k\varphi(x)}{(1+|x|^2)^N},$$

由整数 m 的选取,h 显然是可积函数. 作傅里叶变换得:

$$(1+|\xi|^2)^k\hat{\varphi}(\xi)=(1-\Delta_\xi)^N\hat{h}(\xi).$$

上式右边是有界函数的导函数的有限和,因此,对每个整数 $k\geqslant 0$,有

$$(1+|\xi|^2)^k\hat{\varphi}(\xi)\in D'_{L^\infty},$$

所以 $\hat{\varphi}\in O'_c$.

若 $T\in O'_c$, 由定义及定理 2.7 得: 对于一切 $\alpha\in\mathrm{N}^n$ 有 $x^\alpha T\in D'_L$,从而 $\widehat{x^\alpha T}=D^\alpha\hat{T}(\xi)$. 由定理 2.8 知 $T=\sum_{|\alpha|\leqslant p}D^\alpha f_\alpha$,因此 $\hat{T}(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant p}(i\xi)^\alpha\hat{f}_\alpha$ 是在无限远处缓增的连续函数. 所以 $\hat{T}\in(O_M)$.

(注：事实上，F 是从 O_M 到 O'_c 上以及从 O'_c 到 O_M 上的拓扑同构映射．见参考文献 47，第 VII 章．)

现在证明(2.29)．由定理 2.10，得

$$F(T*U)=(T*U)_x e^{ix\cdot y}=(T_\xi\otimes U_\eta)\cdot e^{i(\xi+\eta)\cdot y}$$
$$=(T_\xi\cdot e^{i\xi\cdot y})(U_\eta\cdot e^{i\eta\cdot y})=FT\cdot FU.$$

(2.28)的证明类似，细节略． □

我们举一个微分方程方面应用的例子来结束本节．设

$$P(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\xi^\alpha$$

是满足条件 $P(\xi)\neq 0(\xi\neq 0, \xi$ 是实数)的多项式．

定理 2.12 若 u 是 R^n 内 $P\left(\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x}u\right)=0$ 的一个解，而且 $|u(x)|\leqslant A(1+|x|)^h(A,\ h$ 是某个正常数)，则 u 是 x 的次数 $\leqslant[h]$(h 的整数部分)的多项式．

证： 因为 $u\in S^*$，所以 $T=Fu\in S^*$，而且 $P(\xi)T=0$．对于任意 $\psi\in S$，

$$T\cdot P(\xi)\psi=P(\xi)T\cdot\psi=0.$$

考虑任意不包含零点的开集 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$，若 $\varphi\in(D_\Omega)$，则

$$T\cdot\varphi=T\cdot P(\xi)\frac{\varphi(\xi)}{P(\xi)}=T\cdot P(\xi)\psi=0.$$

因此 T 的支集最多由原点组成．由第三章定理 8.10 的系，有

$$T=\sum_{|p|\leqslant m}C_pD^p\delta.$$

因此 $u=F^{-1}T$ 是多项式，其次数显然 $\leqslant[h]$． □

§3 一般基本函数的傅里叶变换

根据第二章定理 9.3 的注，S 广义函数本质上是多项式型的

缓增函数，因此空间 S 的理论也只能处理缓增函数的傅里叶变换。但它比古典的傅里叶变换理论还是前进了一步，因为古典理论所处理的只是可积函数类，如 L_1，L_2 等。为了实际需要，人们需要进一步取消缓增条件的限制，用傅里叶变换理论处理急速增长的函数。于是从广义函数的观点来考虑，自然应取空间 S 的子空间为基本空间，因为这样广义函数的限制就放宽了。为了方便起见，我们假定基本空间 Φ 允许微分，对多项式与 Φ 中元素的乘法及共轭运算、反射运算封闭，即基本空间 Φ 满足下列条件：

定义 3.1 若函数集 Φ 满足下列条件：

(1) Φ 是允许微分的；

(2) $x_j(j=1,\cdots,n)$（因此一切 x 的多项式）是 Φ 的乘子；

(3) Φ 的元素是急减 C^∞ 函数，即 $\Phi\subset S$；

(4) 若 $\varphi\in\Phi$，则复共轭 $\overline{\varphi(x)}$ 及反射 $\varphi(-x)$ 也属于 Φ；

则称 Φ 为**基本空间**，其元素称为**基本函数**。

仿照 § 2，我们定义函数 $\varphi\in\Phi$ 的傅里叶变换为

$$\psi(\sigma)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\sigma}\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

同样我们也用 $\tilde{\varphi}(\sigma)$ 或 $F\varphi$ 来表示 φ 的傅里叶变换。§ 2 内算子 F 的基本性质仍满足，特别是下式成立：

$$P(D)\tilde{\varphi}(\xi)=\widetilde{P(\mathrm{i}x)\varphi(x)}, \tag{3.2}$$

$$\widetilde{P(D)\varphi(x)}=P(-\mathrm{i}\xi)\tilde{\varphi}(\xi). \tag{3.3}$$

在第二章内，我们引进了空间 $K(a)$ 及 $Z(a)$。$K(a)$的归纳极限记为K。由第三章定理 4.1 和系 1，K 也是 $K(a^{(m)})$ 的严格归纳极限，这里$\{a^{(m)}\}$是具分量 $a_j^{(m)}$ 的任意向量序列$(j=1,\cdots,n)$，而 $m\longrightarrow\infty$ 时 $a_j^{(m)}\longrightarrow\infty$。因此，$K$ 是基本空间。同理，记 Z 为 $Z(a)$ 的并空间，则 Z 也是基本空间。

设 $\varphi\in K$，则 $\psi(\sigma)$ 是下列函数

$$\psi(s) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot s}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\sigma - x\cdot\tau}\varphi(x)\,dx \tag{3.4}$$

在实轴上的限制，这里 $s=\sigma+i\tau$. 若 $\varphi\in K(a)$，利用第三章 § 2的符号，我们有

$$|s^k\psi(s)| = \left|\int_{G_a} e^{ix\cdot s}D^k\varphi(x)\,dx\right| \leqslant C'_k e^{a|\tau|},$$

这里

$$G_a = \{x \mid |x_1|\leqslant a_1,\cdots,|x_n|\leqslant a_n\}, \tag{3.5}$$

而且 C'_k 是常数. 因此

$$(1+|s|)^m|\psi(s)| \leqslant C_m e^{a|\tau|} \quad (0\leqslant m<\infty). \tag{3.6}$$

比较(3.6)与第二章(2.9)式知算子 F 映 $K(a)$ 到 $Z(a)$ 内. 事实上，它映 $K(a)$ 内的有界集到 $Z(a)$ 内的有界集. 因此 F 是从 $K(a)$ 到 $Z(a)$ 内的连续线性算子. 因为 $K=\bigcup_a K(a)$，$Z=\bigcup_a Z(a)$，所以 F 是从 K 到 Z 内的连续线性算子.

为了证明 F 映 $K(a)$ 到 $Z(a)$ 上，对任意 $\psi\in Z(a)$，我们先给出下列定义：

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\sigma}\psi(\sigma)\,d\sigma \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\sigma+i\tau)}\psi(\sigma+i\tau)\,d\sigma.\end{aligned}$$

由第二章(2.9)(用 $k>n$) 知右边等式成立. 取 $\tau_j=-\delta_j\,\mathrm{sgn}\,x_j$ ($j=1,2,\cdots,n$)，我们得

$$|D^k\phi(x)| \leqslant B_k|s^k|e^{-\delta|x|}e^{\delta\cdot a}.$$

若对某一个 j，有 $x_j>a_j(j=1,\cdots,n)$，则 $\delta_j\to\infty$ 时 $\phi(x)\to0$，于是 $\phi\in K(a)$. 因为函数 ϕ 的傅里叶变换重合于 ψ，所以 F 从 $K(a)$ 一对一地映到 $Z(a)$ 上. 易知，逆傅里叶变换 F^{-1} 映 $Z(a)$ 内的有界集到 $K(a)$ 内的有界集上. 因此 F^{-1} 也是映 Z 到 K 上的连续线性算

子．综上所述，得到下面定理：

定理 3.1 $F[K(a)]=Z(a)$，$F^{-1}[Z(a)]=K(a)$，$F(K)=Z$，$F^{-1}(Z)=K$．而且 F,F^{-1} 都是连续线性算子．

定义 3.2 设 Φ 是任意基本空间(满足定义 3.1)，函数 $\varphi(x)\in\Phi$ 的一切傅里叶变换的全体，我们称为 Φ 的**傅里叶对偶空间**，记为 $\Psi=\tilde{\Phi}=F(\Phi)$．

定理 3.2 设 Φ,Ψ 都是拓扑空间，而且Ψ是基本空间 Φ 的傅里叶对偶空间，则 Ψ 也是基本空间，而且与 Φ 拓扑同构．

证： 显然 Ψ 也是线性空间，而且 F 是映 Φ 到Ψ 上的一对一的映射．因为 Φ 是拓扑空间，令 V 为 Φ 内零点的邻域，定义 $F(V)$ 是 Ψ 内零点的邻域，则 Ψ 也成为拓扑空间．若 Φ 是并空间，则定义 Ψ 内的收敛性如下：

当且仅当$\varphi_m\to 0(\Phi)$时 $F\varphi_m\to 0(\Psi)$．

由 $\psi(\sigma)=F[\varphi(x)]$可推出

$$F^{-1}[\varphi(x)]=(2\pi)^{-n}\psi(-\sigma),$$
$$F[\psi(\sigma)]=(2\pi)^n\varphi(x).\tag{3.7}$$

由第一等式与本节开始的假定得

$$F^{-1}[\Phi]=\Psi,\quad F[\Psi]=\Phi.\tag{3.8}$$

特别有：

$$F^{-1}[K(a)]=Z(a),\quad F^{-1}(K)=Z,$$
$$F[Z(a)]=K(a),\quad F(Z)=K.$$

由(3.7)知 Ψ满足本节开始假定的(4)，由规则(3.2)及(3.3)，Ψ也满足定义 3.1 的(1)和(2)．最后，因为 $F(S)=S$，Ψ 也满足定义 3.1 的(3)．总之，Ψ也是基本空间，而且与空间 Φ 拓扑同构． □

§4 广义函数的傅里叶变换

1. 一般广义函数的傅里叶变换

定义 4.1 设 Φ 是基本空间，Ψ 是 Φ 的傅里叶对偶空间．对

任意 $f\in\Phi$, f 的**傅里叶变换**定义为：

$$Ff\cdot\psi=f\cdot F\psi\quad(\psi\in\Psi),$$

或等价地

$$(F(f),F(\varphi))=(2\pi)^n(f,\varphi). \tag{4.1}$$

注意，在复基本空间与复广义函数空间中，函数型泛函 $f(x)$ 依公式

$$f\varphi=\int_{\mathrm{R}^n}\overline{f(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

运算，而泛函 g 乘以数 α 或函数 $\alpha(x)$ 依公式

$$\alpha f\cdot\varphi=f\cdot\bar{\alpha}\varphi=\bar{\alpha}(f\varphi)$$

运算.

于是按照 $F(\varphi)=\psi$ 及 $\varphi=F^{-1}(\psi)$，傅里叶变换 F 是空间Ψ内傅里叶逆变换的逆算子的共轭算子.

因此，空间 Φ 上广义函数的傅里叶变换是空间 Ψ 上的广义函数. 例如，空间 K 上广义函数的傅里叶变换是空间 Z 上的广义函数.

若 $f(x)$ 为正则广义函数，$g(\sigma)$ 是 $f(x)$ 的古典的傅里叶变换，而 $\psi(\sigma)$ 是基本函数 $\varphi(x)$ 的傅里叶变换，则

$$\begin{aligned}(f,\varphi)&=\int_{\mathrm{R}^n}\overline{f(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_x\overline{f(x)}\left(\int_\sigma\psi(\sigma)\mathrm{e}^{-ix\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_\sigma\psi(\sigma)\left(\int_x\overline{f(x)\mathrm{e}^{ix\sigma}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathrm{R}^n}\overline{g(\sigma)}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{(2\pi)^n}(g,\psi).\end{aligned}$$

因此，我们对广义函数 f 的傅里叶变换的定义与古典的傅里叶变

换一致.

由(2.16)知这里的定义也与缓增广义函数的定义一致.

在公式(4.1)内以 g 代替 $F(f)$, 以 ψ 代替 $F(\varphi)$, 能得到逆算子 $F^{-1}(g)$的定义如下:

$$(g,\psi)=(2\pi)^n(F^{-1}(g),F^{-1}(\psi)).$$

因此有

$$(F^{-1}(g),\ F^{-1}(\psi))=\frac{1}{(2\pi)^n}(g,\psi). \tag{4.2}$$

定理 4.1 若在空间 Φ 内(也在空间 Ψ 内)定义了微分运算和乘以变数 x 的运算,则下列公式成立:

$$P(D)F(f)=F[P(\mathrm{i}x)f], \tag{4.3}$$

$$F[P(D)f]=P(-\mathrm{i}\sigma)F(f). \tag{4.4}$$

证: 依公式(3.2)及(3.3)得

$$\begin{aligned}&(F[P(\mathrm{i}x)f],F(\varphi))=(2\pi)^n(P(\mathrm{i}x)f,\varphi)\\&=(2\pi)^n(f,\bar{P}(-\mathrm{i}x)\varphi(x)\mathrm{d}x)=(F(f),F[\bar{P}(-\mathrm{i}x)\varphi])\\&=(F(f),\bar{P}(-D)F(\varphi))=(P(D)F(f),F(\varphi)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(F[P(D)f],F(\varphi))=(2\pi)^n(P(D)f,\varphi)\\&=(2\pi)^n(f,\bar{P}(-D)\varphi)=(F(f),F[\bar{P}(-D)\varphi])\\&=(F(f),\bar{P}(\mathrm{i}\sigma)F(\varphi))=(P(-\mathrm{i}\sigma)F(f),F(\varphi)).\end{aligned}$$ □

作用算子 F^{-1} 于(4.3)及(4.4)且以 g 代替 $F(f)$ 得到下列公式:

$$F^{-1}[P(D)g]=P(\mathrm{i}x)F^{-1}(g), \tag{4.5}$$

$$P(D)F^{-1}(g)=F^{-1}[P(\mathrm{i}\sigma)g]. \tag{4.6}$$

2. δ 函数的傅里叶变换

在第二章内我们已知 δ 函数在广义函数论里占重要地位,而且它可在任意基本空间内定义. 以前曾定义为:

$$(\delta_{(a)},\varphi)=\varphi(a).\quad(a\in\mathbf{R}^n,\varphi\in\Phi)$$

这里 $\delta_{(a)}$以 $a\in\mathbf{R}^n$ 为实参数. 如果取由解析函数组成的基本空间

Φ，则可以定义以 $z\in C^n$ 为复参变数的 δ 函数 $\delta\in(Z)$：

$$(\delta_{(z)},\varphi)\triangleq\varphi(z).\quad(z\in C^n,\varphi\in\Phi)$$

因为基本函数 φ 为解析的，所以 $(\delta_{(z)},\varphi)$ 实质上是函数 $(\delta_{(\sigma)},\varphi)$ 的解析延拓. 这种从已知广义函数通过解析延拓定义新的广义函数的方法是常用的(例如发散积分的有限部分).

关于 δ 函数的傅里叶变换，成立下列定理：

定理 4.2

$$F(\delta)=1,\quad F(1)=(2\pi)^n\delta;\tag{4.7}$$

$$F\delta_{(h)}=e^{ih\cdot\xi},\quad F(e^{ih\cdot x})=(2\pi)^n\delta_{(h)};\tag{4.8}$$

$$F(P(D)\delta)=P(-i\xi),$$

$$F(P(ix)\delta)=(2\pi)^nP(D)\delta.\tag{4.9}$$

证：(4.7)是(4.8)的特殊情形，(4.9)可以从(4.7) 及 (4.3)，(4.4)得出. 我们只证(4.8).

$$(F\delta_{(h)},\varphi)=(2\pi)^n(\delta_{(h)},\varphi)=(2\pi)^n\varphi(h)$$

$$=(2\pi)^n\int_{R^n}\psi(\xi)e^{-ih\xi}d\xi$$

$$=(2\pi)^n\int_{R^n}\psi(\sigma)\,e^{\overline{ih\xi}}d\xi=(e^{ih\xi},\psi).$$

又，依(4.1)，有

$$(F(e^{ihx}),F(\varphi))=(2\pi)^n(e^{ih\cdot x},\varphi)$$

$$=(2\pi)^n\int_{R^n}e^{ihx}e^{i\xi\cdot x}\varphi(x)dx$$

$$=(2\pi)^n\psi(h)=(2\pi)^n(\delta_{(h)},\psi),$$

所以(4.8)成立. □

3. Z 上的广义函数与傅里叶变换

定理 4.3 设 f 是支集位于(3.5)所定义的 n-矩形 G_a 内的分布，则它的傅里叶变换是 (Z^*) 内的函数型 $h(\sigma)$ 泛函. 这里 $h(\sigma)$ 能延拓为指数 $\leqslant a+\varepsilon$ 的整函数，而且 $s=\sigma$ 是缓增的. 更准确地说，

$$|h(s)| \leqslant A(1+|\sigma|)^{\lambda} e^{(a+\varepsilon)|\tau|} \quad (A>0, \lambda \geqslant 0). \tag{4.10}$$

证： 由第三章定理 9.8 知

$$f \underset{\Lambda}{=} \sum_{q \leqslant p} (-1)^{|q|} D^q g_q,$$

这里 g_q 是连续函数，而且对任意给定的 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)>0$，它在 $G_{a+\varepsilon}$ 外为 0．由(3.4)得

$$\tilde{f} = \sum_{q \leqslant p} (i\sigma)^q h_q(\sigma),$$

这里 $h_q(\sigma)=\tilde{g}_q$ 能延拓为满足不等式

$$|h_q(s)| \leqslant C_q e^{(a+\varepsilon)|\tau|}$$

的整函数． □

如果已知 Φ 上广义函数的结构，则能用傅里叶变换作为工具发现 $\tilde{\Phi}$ 上广义函数的结构．例如有如下定理：

定理 4.4 在 $Z'(a)$ 内的每个广义函数 f 都是函数型 $F(\sigma)$，即

$$f \cdot \psi = \int_{\mathbf{R}^n} F(\sigma) \psi(\sigma) d\sigma, \tag{4.11}$$

这里 $F(s)$ 是整函数，而且满足

$$|F(s)| \leqslant A(1+|\sigma|)^{\lambda} e^{a|\tau|}.$$

反之是平凡的．

证： 若 $k \in K^*(a)$，由第三章定理 8.3 的证明得

$$k = (-1)^{|m|} D^m g,$$

这里 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，它的支集 $\operatorname{supp} g$ 位于 G_a 的某一开邻域内．取 $\varphi \in K(a) \equiv (D_{G_a})$ 而且由(4.1)得

$$\tilde{k} \cdot \psi = (-1)^{|m|} D^m g \cdot F\psi = g \cdot D^m (F\psi) = g \cdot F(i\sigma)^m \psi$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} g(x) \left[\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \sigma} (i\sigma)^m \psi(\sigma) d\sigma \right] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} F(\sigma)\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

这里
$$F(\sigma) = (\mathrm{i}\sigma)^m \int_{G_a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\sigma} g(x)\mathrm{d}x.$$

令 $f = \tilde{k}$，则 $f \in Z^*(a)$. □

§5 广义函数的卷积

1. 连续平移与可微平移

为了研究广义函数的卷积，我们先引进连续平移与可微平移的概念.

定义 5.1 若对任意 $h \in \mathbb{R}^n$，算子

$$\tau_h \varphi(x) = \varphi(x+h) \tag{5.1}$$

映 Φ 到 Φ 内，而且当 $|h| \leqslant 1$ 时关于 h 一致有界，则称 Φ **容许连续平移**.

显然，若 Φ 容许连续平移，则它在 $\mathbb{R}^n$ 的任意有界集内关于 h 一致有界.

定义 5.2 若对任意 $h = (0, \cdots 0, \overset{\text{第}j\text{项}}{h_j}, 0, \cdots, 0)(1 \leqslant j \leqslant n)$，有

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h_j} \to \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\Phi) \quad (h \to 0), \tag{5.2}$$

则称 Φ **容许可微平移**.

显然，若 Φ 容许可微平移，则 Φ 容许连续平移.

定理 5.1 若 Φ 是容许连续平移的完全空间或这种空间 $\Phi^{(m)}$ 的可列并空间，则对任意固定的 $\varphi \in \Phi$，$h \mapsto \tau_h \varphi$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 Φ 内的连续映射.

证： 只用证明当 $h=0$ 时映射 $h \mapsto \tau_h \varphi$ 的连续性即可. 集 $\{\tau_h \varphi \mid |h| \leqslant 1\}$ 是 Φ 内的有界集，而且（由定义）它属于某个完全空间 $\Phi^{(k)}$（若 Φ 本身是完全空间，则它属于 Φ）. 因此这个集是相对紧的，于是只用证明当 $h \to 0$ 时不能有两个不同的极限元素即可. 事

实上，若对某个序列 $h_m \to 0$ 时 $\tau_{h_m}\varphi \to \varphi_0$，则对每一点 x，

$$\tau_{h_m}\varphi(x) = \varphi(x+h_m) \to \varphi_0(x), (h_m \to 0)$$

从而极限元素 φ_0 唯一. □

定理 5.2　若 Φ 是容许连续平移的完全空间，则 Φ 也容许可微平移.

证： 如果我们证明集

$$\left\{\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h_j} \,\middle|\, |h| \leqslant 1\right\} \tag{5.3}$$

在 Φ 内有界，则证明可自考虑 $h \to 0$ 时不能有两个不同的极限得出，因为对任意固定的 x，任一极限元素 φ_1 在点 x 必然重合于 $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}$. 为了证明(5.3)中的函数在 Φ 内的有界性，我们记这些函数为下列形式：

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{h_j}\int_0^{h_j} \frac{\partial\varphi(x+t)}{\partial x_j} \mathrm{d}t_j, \tag{5.4}$$

$$(t = (0, \cdots, 0, \overset{\text{第}j\text{项}}{t_j}, 0, \cdots, 0))$$

对每一个 t_j，当 $|t_j| \leqslant 1$ 时，函数

$$\tau_t \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi(x+t)}{\partial x_j}$$

是 Φ 的元素，而且(由定理 5.1)当 t 在集$\{t \mid |t| \leqslant 1\}$内变化时，它依 Φ 的拓扑连续变化，因此抽象积分(见第一章 §6 第 2 段)

$$\int_0^{h_j} \tau_t \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \mathrm{d}t_j$$

存在. 由它的定义及第二章 §2定义 2.1 内的性质 2 推出，对任意固定的 $x \in \mathrm{R}^n$，它的值是(标准)积分

$$\int_0^{h_j} \tau_t \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}t_j,$$

即 $h_j\varphi_h(x)$，于是我们能说 φ_h 是函数

$$\frac{1}{h_j}\int_0^{h_j}\tau_t\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\mathrm{d}t_j.$$

这里积分是抽象意义. 因为对于 $|t|\leqslant 1$，$\rho_{t_j}=\tau_t\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ 属于有界集 B $\subset\Phi$，我们可以假定 B 是凸集，对任意 $|h|\leqslant 1$，部分和

$$\frac{1}{h_j}\sum\rho_{t_{j,m}}\Delta t_{j,m}\in\frac{1}{h_j}\left(\sum\Delta t_{j,m}\right)B=B,$$

因此，极限 φ_h 属于有界集 B. □

空间 $K(a)$ 不容许可微平移，K，S 和 $Z(a)$ 容许可微平移. 而 $K\{M_p\}$ 空间，当 $R_M\neq\varnothing$ 而且满足第二章 § 9 的性质 (N_2) 时，它才容许连续平移.

2. **卷缩**

设 Φ 容许连续平移，则对任意 $f\in\Phi^*$，函数

$$(f*\varphi)(x)\triangleq f\cdot\tau_x\varphi=(f(\xi),\varphi(x+\xi))$$

是 x 的连续函数，于是我们引入下列定义：

定义 5.3　设 $f_0\in\Phi^*$，若对任意 $\varphi\in\Phi$，

$$f_0*\varphi=f_0\cdot\tau_x\varphi=(f_0(\xi),\varphi(x+\xi))\in\Phi,$$

而且映射 $\varphi\mapsto f_0*\varphi$ 是 Φ 内的自连续映射，即 $\varphi_m\longrightarrow 0(\Phi)$ 蕴涵 $f_0*\varphi_m\longrightarrow 0(\Phi)$，则称 f_0 同空间 Φ **卷缩**.

由此定义，我们可以定义广义函数 $f,f_0\in\Phi^*$ 的**卷积**为

$$f_0*f\cdot\varphi=f\cdot f_0*\varphi\ \text{或}\ (f_0*f,\varphi)=(f_0,f*\varphi).\tag{5.5}$$

这里 f_0*f 显然是 Φ^* 的元素.

现在的定义同第三章 § 9 给出的卷积定义一致. 现在的定义当然更广一些，而且一般说来，若 f_0*f 存在，卷积 $f*f_0$ 却不一定存在，因为 f 可以不同 Φ 卷缩，我们可以把 f_0*f（或 $f_0*\varphi$）设想为算子 f_0* 作用于 f（或 φ）的像. 当我们取这种观点时，也称 f_0 为**卷子**.

δ 同任意基本空间 Φ 卷缩. 因为

$$\delta*\varphi=\delta\cdot\tau_x\varphi=(\delta,\varphi(x+\xi))=\varphi(x),$$

于是 $\delta*\varphi=\varphi$, 所以

$$\delta*f=f,(f\in\Phi'). \tag{5.6}$$

3. 卷积的微分法

定理5.3 设 Φ 容许可微平移而且假定 f 同 Φ 卷缩, 则对任意 $D=(D_1,\cdots,D_n)$ 的多项式 $P(D)$, $P(D)f_0$ 也同 Φ 卷缩, 而且有

$$P(D)(f_0*f)=P(D)f_0*f=f_0*P(D)f. \tag{5.7}$$

证: 若我们对 $P(D)=D_j$ 证明了定理, 则逐步运用这个结果, 就得到对任意多项式 $P(D)$ 的证明. 任取 $f\in\Phi^*$, 由于

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}*\varphi=\left(\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_j},\varphi(x+\xi)\right)$$

$$=-\left(f(\xi),\ \frac{\partial\varphi(x+\xi)}{\partial\xi_j}\right)=-f*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \tag{5.8}$$

我们取 $f=f_0$, 则 $\dfrac{\partial f_0}{\partial x_j}$ 同 Φ 卷缩.

因为 f_0* 是从 Φ 到 Φ 内的连续算子, 故当 $h=(0,\cdots,\overset{\text{第}j\text{项}}{h_j},0,\cdots,0)$ 且 $h\to0$ 时

$$f_0*\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h_j}\to f_0*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

依 Φ 的拓扑成立.

令 $\lambda(x)=(f_0*\varphi)(x)$, 则上式左边为

$$\frac{\lambda(x+h)-\lambda(x)}{h_j}.$$

因此 $\lambda(x)$ 是可微函数, 而且

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f_0*\varphi)=f_0*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}. \tag{5.9}$$

现在通过(5.8)与(5.9)可证明(5.7)如下：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f_0*f),\varphi\right)=-\left(f_0*f,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)$$

$$=-\left(f,f_0*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=-\left(f,\frac{\partial(f_0*\varphi)}{\partial x_j}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},f*\varphi\right)=\left(f_0*\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\right).$$

重复运用这个等式知第二个等式成立. 同理，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f_0*f),\varphi\right)$$

$$=-\left(f_0*f,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=-\left(f,\ f_0*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)$$

$$=\left(f,\ \frac{\partial f_0}{\partial x_j}*\varphi\right)=\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_j}*f,\varphi\right).$$

重复运用这个等式知第一个等式也成立. □

利用卷积的可微性定理，我们能证明一类广泛的卷缩——有限泛函的卷缩.

定义 5.4 设 $f\in\Phi^*$，G 为闭集. 若对于 G 的某个开邻域内为零的任意函数 $\varphi\in\Phi$，总有 $f\cdot\varphi=0$，则称 f 被闭集 G **支撑**. 对于分布 T，支撑 T 的最小闭集存在，而且称为 T 的支集. 若泛函 $f\in\Phi^*$ 被一个紧集支撑，则称 f 为**有限泛函**.

定理 5.4 设 Φ 是包含 C_c^∞ 作为稠密子集的完全空间，而且 Φ 容许连续平移，则 Φ^* 内的任意有限泛函同 Φ 卷缩.

证： 由第三章 § 8 末的注，在 C_c^∞ 上

$$f=\sum_{q\leqslant p}D^q f_q,\tag{5.10}$$

这里 f_q 是具有紧支集的连续函数，

由泛函 f_q 的定义知

$$f_q\cdot\varphi=\int_R f_q(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

这里 R 是包含 f 的支集的紧集，因此

$$f_q*\varphi=\int_R f_q(\xi)\varphi(x+\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{5.11}$$

现在我们证明 $\varphi\mapsto f_q*\varphi$ 是从 Φ 到 Φ 内的连续算子（注意，即使 $f_q\cdot\varphi$ 及 $f_q*\varphi$ 对任意 $\varphi\in\Phi$ 被确定（因为 $\Phi\subset S$），也不能断定 f_q 是 Φ 上的连续泛函.）

如在定理 5.1 的证明中一样，(5.11) 内的积分可以认为是下列抽象积分：

$$I(\varphi)\triangleq\int_R f_q(\xi)\tau_\xi\varphi\mathrm{d}\xi \tag{5.12}$$

在 x 的值. 积分(5.12) 的存在当然蕴涵 $f_q*\varphi$ 属于 Φ，现在命 φ 在有界集 $B\subset\Phi$ 内变化，回忆积分(5.12)的定义（见第一章 §6第2段）可知 $I(\varphi)$在集合

$$B_0\triangleq\{\mu B_1\mid|\mu|\leqslant M|R|\}$$

内变化，这里 $M=\sup|f_q|$，$|R|$是 R 的测度，而 B_1 是包含所有的 $\tau_\xi\varphi$ $(\varphi\in B,\xi\in R)$的有界凸集. 因为 B_0 是有界集，f_q* 映 Φ 内的有界集到 Φ 内的有界集，取 $x=0$，而且用第二章 §2 定义 2.1 内 Φ 的性质 2 推出 f_q 是 Φ 上的连续泛函.

上面我们证明了每个 f_q 同 Φ 卷缩，由定理 2.6 得 $D^q f_q$ 同 Φ 卷缩，注意到(5.10)两边在 Φ 上连续，于是 f 同 Φ 卷缩. □

注意，若 f_0 是 C_0^∞ 函数，则 f_0*f 是 C^∞ 函数. 事实上，每个 $f\in\Phi^*$ 都是分布（由第三章 §8 末的注），于是由第三章定理 11.1 即得结论.

定理 5.5(卷积运算的连续性定理)　设 Φ 是包含 C_0^∞ 作为稠密子集而且容许连续平移的完全空间，f 与 f_j 是由紧集 R 支撑的 Φ 广义函数. 若 $f_j\to f(\Phi^*)$，则对任意 $g\in\Phi^*$，有

$$f_j * g \longrightarrow f * g\ (\Phi^*).$$

证：不失一般性，我们假定 $f=0$，由第三章§8末的注知 f 与 f_j 同属于某个 $K(a)$．应用第三章§8的定理8.5与定理8.8的证明，我们得表达式

$$f_j = \sum_{q \leqslant p} D^q g_{jq},$$

这里 p 与 j 无关，g_{jq} 是支集包含于某个紧集 R^0 内的连续函数，且是满足条件

$$\sup_x |g_{jq}(x)| \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{5.13}$$

上述表达式在 C_c^* 上成立，由定理5.4的证明知它在 Φ 上也正确．

由定理5.4的证明与(5.7)式得

$$\begin{aligned}&(-1)^{|q|} D^q g_{jq} * \varphi \\ &= g_{jq} * D^q \varphi \\ &= \int_{R^0} g_{jq}(\xi) D^q \varphi(x+\xi) \mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{5.14}$$

这里的积分取抽象意义．设 $\varphi \in \Phi$，则 $\tau_\xi D^q \varphi$ 在有界集内变化．假定

$$\|\tau_\xi D^q \varphi\|_m \leqslant C_m \quad (1 \leqslant m < \infty),$$

应用第一章(6.3)于本章的(5.14)内的积分，得

$$\|D^q g_{jq} * \varphi\|_m \leqslant C_m \sup_\xi |g_{jq}(\xi)| \leqslant C_m \xi_j \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty),$$

因此 $D^q g_{jq} * \varphi \to 0$，于是 $f_j * \varphi \longrightarrow 0\ (\Phi)\ (j \to \infty)$，从而对任意 $g \in \Phi^*$，有

$$(f_j * g, \varphi) = (g, f_j * \varphi) \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty),$$

即 $f_j * g$ 弱收敛于0．因为 Φ 是完全空间，所以也强收敛于0．□

§6 卷积定理

在§2的定理2.4中，我们证明了$\varphi,\psi\in(S)$时，φ与ψ的卷积的傅里叶变换等于φ与ψ的傅里叶变换之积. 定理2.11又推广到$\varphi\in(O'_c)$，$\psi\in(S^*)$的情形. 本节把这个结论进一步推广到较一般的情形.

定理 6.1 设Φ容许连续平移，而且$\Psi=F\Phi$. 若$g\in\Psi^*$是函数$g(\sigma)$型广义函数，而且$g(\sigma)$是Ψ内的乘子，则$f=F^{-1}(g)$同Φ卷缩，而且对任意$f_1\in\Phi^*$，

$$F(f*f_1)=F(f)\cdot F(f_1). \tag{6.1}$$

证： 我们首先证明f同Φ卷缩. 对任意$\varphi\in\Phi$，令$F\varphi=\psi$，则

$$F(\tau_h\varphi)=e^{-ih\cdot\sigma}\psi(\sigma). \tag{6.2}$$

因为$F\varphi=\psi$蕴涵$(2\pi)^n\overline{\varphi}=F\overline{\psi}$，取$\varphi_1=\tau_h\varphi$，而且用(6.2)得

$$(2\pi)^n\overline{\tau_h\varphi}=F(e^{ih\cdot\sigma}\overline{\psi(\sigma)}). \tag{6.3}$$

由(4.1)与(6.3)得

$$f*\varphi=f\cdot\overline{\tau_x\varphi}=\frac{1}{(2\pi)^n}f\cdot F\;(e^{ix\cdot\sigma}\overline{\psi(\sigma)})$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}g\cdot e^{ix\cdot\sigma}\overline{\psi}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}g(\sigma)e^{ix\cdot\sigma}\;\overline{\psi(\sigma)}d\sigma,$$

即 $$(f*\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}F(g\overline{\psi})(x)=F^{-1}(g\overline{\psi})(-x). \tag{6.4}$$

因为g是Ψ内的乘子，所以$g\overline{\psi}\in\Psi$，从而(6.4)的右边属于Φ(因为Φ与Ψ都满足定义3.1的(4). $f*\varphi$对于φ的连续性也可由(6.4)推出，因此f同Φ卷缩. 用(6.4)，得(6.1)的证明如下：

$$(F(f*f_1),\overline{\psi})=(f*f_1,F\overline{\psi})=(2\pi)^n(f_1,f*\varphi)$$

$$=(f_1,F(g\overline{\psi}))=(Ff_1,g\overline{\psi})=(g\cdot Ff_1,\psi).\ \square$$

现在我们进一步推广卷积概念.

定义 6.1　设 $f_0\in\Phi^*$. 若对任意 $\varphi\in\Phi$, $f_0*\varphi$ 属于某个空间 Φ_1, 而且 $\varphi\mapsto f_0*\varphi$ 是从 Φ 到 Φ_1 内的连续映射, 则称 f_0 是从 Φ 到 Φ_1 内的**卷子**, 也称 f_0 **卷缩** Φ 到 Φ_1 内.

我们进一步定义 f_0*f 如下:

设 $f_0\in\Phi^*$, 对任意 $f\in\Phi_1^*$, 定义

$$(f_0*f,\varphi)=(f,f_0*\varphi)\quad(\varphi\in\Phi),$$

显然 f_0*f 属于 Φ^*.

现在能推广定理 6.1. 其证明由定理 6.1 的证明略加修改即可.

定理 6.1′　假定 Φ 及 Φ_1 都容许连续平移, 而且 $F\Phi=\Psi$, $F\Phi_1=\Psi_1$. 设 $g\in\Psi^*$ 是函数 $g(\sigma)$ 型广义函数而且 $\psi\mapsto g\psi$ 是从 Ψ 到 Ψ_1 内的连续映射, 则 $f=F^{-1}(g)$ 是从 Φ 到 Φ_1 内的卷子, 而且对任意的 $f_1\in\Phi_1^*$ 有

$$F(f*f_1)=F(f)\cdot F(f_1).$$

这里, 由定义知, 对任意 $\psi\in\Psi$ 有 $(g\cdot F(f_1),\varphi)=(F(f_1),g\psi)$.

定理 6.2　设 Φ 是包含 C_0^∞ 作为稠密子集而且容许连续平移的完全空间, 则对任意有限泛函 $f\in\Phi^*$, $g\triangleq Ff$ 是 $\Psi\triangleq F(\Phi)$ 内的乘子, 而且

$$F(f*f_1)=g\cdot g_1\quad(f_1\in\Phi')\tag{6.5}$$

成立, 这里 $g_1=Ff_1$.

证: 由定理 5.4, f 同 Φ 卷缩. 设 $\varphi\in C_0^\infty$, 则

$$F(f*\varphi)=F(f(\xi),\varphi(x+\xi))=\int e^{ix\cdot\sigma}(f(\xi),\tau_x\varphi(\xi))dx$$

依条件 $f*\varphi=(f(\xi),\ \varphi(x+\xi))$ 是基本函数, 所以等式右边的积分能表示为

$$\left(f(\xi),\int e^{ix\cdot\sigma}\tau_x\varphi dx\right),$$

而函数 $e^{ix\cdot\sigma}\tau_x\varphi$ 能认为是在 Φ 内取值的抽象连续函数, 而且可在

有界集上积分(在其外 $f*\varphi=0$). 所以此积分可以认为是在第一章§6中抽象意义下的积分. 此积分是 Φ 内的函数，而且它在任意点 ξ 的值当元素 φ 由 $\varphi(\xi)$ 代替时(这可由第二章§2中 Φ 的性质(2)及第一章§6的定义6.1推出)是标准积分. 记

$$\tau_x\varphi(\xi)=\tau_\xi\varphi(x),$$

由(6.2)得

$$\begin{aligned}F(f*\varphi)&=(f(\xi),e^{-i\sigma\cdot\xi}\psi(\sigma))\\&=\psi(\sigma)(f(\xi),e^{-i\sigma\cdot\xi}).\end{aligned}\tag{6.6}$$

我们现在使用下列公式：

$$(f(\xi),e^{i\sigma\cdot\xi})=F(f).\tag{6.7}$$

此公式对函数成立(由 F 的定义). 一般情况可由表达式(5.10),用(5.7)及(4.4)推出. 由(6.7)知(6.6)成立.

$$F(f*\varphi)=g(-\sigma)\psi(\sigma)\quad(\varphi\in C_0^\infty).\tag{6.8}$$

当 φ 在 Φ 内变化时,(6.8)的左边在 Ψ 内连续变化. 右边能推广为 Ψ 到 Ψ 内的连续算子，因此 g 是 Ψ 内的乘子，从而也是 Ψ^* 内的乘子.

最后我们证明(6.5)：

$$\begin{aligned}(F(f*f_1),\bar{\psi})&=(f*f_1,F\bar{\psi})=(2\pi)^n(f_1,f*\varphi)\\&=(2\pi)^n(F^{-1}g_1,f*\varphi)=(2\pi)^n(g_1,F^{-1}(f*\varphi))\\&=(g_1(\sigma),\overline{g(\sigma)\psi(\sigma)})=(g\cdot g_1,\bar{\psi}).\ \square\end{aligned}$$

类似于傅里叶变换理论，在广义函数论基础上也可以建立拉普拉斯变换理论和希尔伯特变换理论，作为古典的相应理论的推广，这里从略，见参考文献53.

第五章　核算子与核空间

本章研究一类重要的赋可列范空间——核空间. 这类空间联系着“关于核的定理”，可以得到许多具体空间中双线性泛函的一般形式. 核空间在泛函分析的其他许多问题（例如拓扑线性空间上的测度论）中也起着重要作用. 在本章中主要注意于一般理论，而不涉及具体问题.

核空间的定义与核算子有关，因此本章先讨论紧算子与希尔伯特-施米特 (Schmidt) 型算子，再讨论核算子，然后给出核空间概念. 为简单起见，我们只讨论希尔伯特空间，而在最后指出向局部凸核空间的推广. 关于它的应用，参看书后所列参考文献 51 和 52.

§1　绝对 p 凸集与半连续凸泛函

1. 绝对 p 凸集

定义 1.1　设 E 是线性空间 X 内的点集. 若对于 E 内任意二点 x, y 和任意二复数 α, β 及 $0<p\leqslant 1$，当 $|\alpha|^p+|\beta|^p\leqslant 1$ 时，总有 $\alpha x+\beta y\in E$，则称 E 为**绝对 p 凸集**.

若 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，而且 $\alpha^p+\beta^p=1$ 时 $\alpha x+\beta y\in E$，则称 E 为 **p 凸集**. $p=1$ 时，E 即为**凸集**与**绝对凸集**.

注：在实线性空间内，绝对凸集等价于中心对称的凸集.

定义 1.2　设 X 为数域 K 上的线性空间，$E\subset X$. 包含 E 的一切(绝对)凸集的交集称为 E 的(绝对)**凸包**，记为[E]或(ΓE).

定理 1.1　(1) 若 A 和 B 是(绝对)凸集，则 $A+B$ 亦然；

(2) 若 A 是(绝对)凸集，α 属于某一指标组 I，则交集 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ 亦然；

(3) 若 A 是(绝对)凸集，λ 是任一复数，则 λA 亦然；

(4) 若 A 是(绝对)凸集，则 A 的(绝对)凸包亦然.

证明留作练习.

定理 1.2 设 A 是非空绝对凸集，则

(1) $0\in A$；

(2) 当 $|\alpha|\leqslant|\beta|$ 时，$\alpha A\subset\beta A$；

(3) 若 λ_i 是复数($i=1,2,\cdots$)，则

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i A)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right)A.$$

证明留作练习.

2. 绝对 p 凸集与凸泛函的关系

构造绝对凸集的简单方法是应用绝对 p 半范数. 为方便计，复习如下：

定义 1.3 设 X 是线性空间，q 是满足下列条件的实泛函：

(1) $q(\lambda x)=|\lambda|^p q(x)$；

(2) $q(x+y)\leqslant q(x)+q(y)$；

则称 q 是 X 上的**绝对 p 半范数.**

由(1)和(2)知，$0=q(0)\leqslant q(x)+q(-x)=2q(x)$，因此 q 总是非负的.

注：在上述定义中，并不假定 p 对 X 内所有的元素都是有限的，可以有 $p(x)=\infty$，其中假定 $\infty+a=\infty,\infty+\infty=\infty$，而且当数 $a\neq 0$ 时有 $a\cdot\infty=\infty$. 显然，使泛函 p 取有限值的元素 x 的全体组成 X 的线性子空间(一般说来不是闭的). 也可以使 p 避免以无限大为值，办法是把 p 看成上述线性子空间上的泛函.

由第一章定理 2.1 知，若设 q 是线性空间 X 上的绝对 p 半范数，$r>0$，则集

$$\{x \mid q(x)<r\} \text{和集} \{x \mid q(x)\leqslant r\}$$

都是吸收的绝对 p 凸集.

事实上，例如设 $q(x)<r, q(y)<r, \alpha$ 和 β 是二复数，而且 $|\alpha|^p+|\beta|^p\leqslant 1$，则

$$q(\alpha x+\beta y)\leqslant|\alpha|^p q(x)+|\beta|^p q(y)$$
$$<(|\alpha|^p+|\beta|^p)r\leqslant r.$$

因此，集 $\{x \mid q(x)<r\}$ 是绝对 p 凸集，另一个证明类似.

另一方面，在拓扑线性空间中，从一个非空、开、绝对凸集 A 出发也能构造 X 上的凸泛函（即在定义 1.3 内将(2)改为 $q(\lambda x)=\lambda q(x), \lambda\geqslant 0$）.

由第一章定理 2.2 的注知，若设 A 是拓扑线性空间 X 内的非空、开、绝对凸集，则闵可夫斯基泛函

$$\mu_A(x)=\inf_{\substack{\lambda>0\\ x\in\lambda A}}\{\lambda\} \tag{1.1}$$

是 X 上的凸泛函，而且

$$\{x \mid \mu_A(x)<1\}\subset A\subset\{x \mid \mu_A(x)\leqslant 1\}.$$

3. 下半连续凸泛函

定义 1.4 设 p 是 X 上的凸泛函. 若对任一 $x_0\in X$ 和任一实数 $\varepsilon>0$，存在 x_0 的邻域 U，使得对任一 $x\in U$，总有下列不等式：

$$p(x)>p(x_0)-\varepsilon,$$

则称 p 是**下半连续**的. 同理，可定义**上半连续**的凸泛函.

定理 1.3 若凸泛函 p 是下半连续的，则

$$E=\{x \mid p(x)\leqslant 1\} \tag{1.2}$$

是闭集.

证： 设 $x_0\in E'$，因为对于 x_0 的任一邻域 U，存在 $x\in U$，使得

$p(x)\leqslant 1$，所以 $p(x_0)\leqslant 1$，即 $x_0\in E$. □

定理 1.4 若绝对凸集 E 是闭集，则相应的凸泛函 $p(x)$ 是下半连续的.

证： E 的余集 $E^c\triangleq\{y\mid p(y)>1\}$ 是开集，于是集 $A\triangleq\{x\mid p(x)>a\}$ 也是开集，其中 a 是任一实数. 任取 $x_0\in X$，则适合 $p(x)>p(x_0)-\varepsilon$ 的全体 x 组成开集，它是 x_0 的邻域，所以 $p(x)$ 在 x_0 是下半连续的. □

定理 1.3 和定理 1.4 证明了在下半连续凸泛函 $p(x)$ 与绝对凸闭集 E 之间存在着双方单值的对应关系. 由此推出，若 E 为绝对凸集，则 $p(x)$ 连续的充要条件为 E 和 $E_1\triangleq\{x\mid p(x)\geqslant 1\}$ 为闭集.

定理 1.5 设 $\{p_a(x)\}$ 是拓扑线性空间上的下半连续凸泛函族，则由等式

$$p(x)=\sup_a\{p_a(x)\} \tag{1.3}$$

定义的泛函 $p(x)$ 也是下半连续的凸泛函.

证： 令 A_a 为对应于泛函 $p_a(x)$ 的绝对凸的闭集. 显然，不等式 $p(x)\leqslant 1$ 成立的充要条件是 $x\in\bigcap\limits_a A_a$. 然而闭绝对凸集的交集也是闭绝对凸集，因此泛函 $p(x)$ 对应于闭绝对凸集 $A=\bigcap\limits_a A_a$，从而 $p(x)$ 是下半连续的凸泛函. □

在第一章中我们已得到下列定理：

定理 1.6 设 E 是赋可列范空间[①] X 内的闭绝对凸集. 若 E 又是吸收集，则 E 必包含空间 X 内零的某个邻域.

证明参看第一章定理 3.2.

定理 1.6 等价于下面的赋可列范空间上的凸泛函的定理.

① 本章内的赋可列范空间总假定是完备的.

定理 1.7 设 $p(x)$ 是赋可列范空间 X 上的下半连续凸泛函，而且在此空间上处处取有限值，则泛函 $p(x)$ 必在零点的某个邻域上有界.

证： 令 $A=\{x|p(x)\leqslant 1\}$，则 A 为闭绝对凸集．因为 $p(x)$ 处处取有限值，于是集 A 是吸收的，从而在 A 内包含邻域 U，所以在此邻域上 $p(x)\leqslant 1$．□

此定理还可推广如下：

定理 1.8 设 $p_1(x),\cdots,p_n(x),\cdots$ 是赋可列范空间 X 上的下半连续凸泛函序列，又设

$$p_1(x)\geqslant p_2(x)\geqslant\cdots\geqslant p_n(x)\geqslant\cdots. \tag{1.4}$$

而且对于任一点 x，自某个数 $n=n(x)$ 起，$p_n(x)$ 取有限值，则必存在与 x 无关的常数 n_0，m 和 M，使得当 $n>n_0$ 时，泛函 $p_n(x)$ 处处取有限值，甚至对所有的点 x，不等式

$$p_n(x)\leqslant M\|x\|_m \tag{1.5}$$

成立.

证： 令 $A_n=\{x\mid p_n(x)\leqslant 1\}$，则 A_n 是闭绝对凸集．同时，空间 X 内每一个元素 x 必属于至少一个形如 kA_n 的集（k 为正整数）．就是说，若 $p_n(x)$ 是有限值而且 $p_n(x)\leqslant k$，则 $x\in kA_n$，于是有等式 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}kA_n$．因为空间 X 不可能分解为可列个疏朗集的并，所以至少有一个集 kA_{n_1} 在空间 X 内某个邻域内稠密，那么集 A_{n_1} 也在 X 的某个邻域内稠密．由于集 A_{n_1} 是闭的，它必然包含 X 内某个由不等式 $\|x-x_0\|_m<r$ 确定的球 $S_m(x_0,r)$．因此，由 A_{n_1} 的绝对凸性，仿定理 1.6 之证，它也包含球

$$S_m(r/2)=\{x\mid \|x\|_m\leqslant r/2\}.$$

换句话说，我们证明了由不等式 $\|x\|_m\leqslant r/2$ 推出不等式 $p_{n_1}(x)\leqslant 1$．由于当 $n\geqslant n_0$ 时有 $p_n(x)\leqslant p_{n_1}(x)$，所以对于一切 $n\geqslant n_0$ 和一切 x，

不等式 $p_n(x)\leqslant M\|x\|_m$ 成立，其中 $M=2/r$. □

§2 紧算子

除特别声明外，今后所考虑的一切算子类总是由有限秩或退化算子(即将全空间映成有限维子空间的算子)空间按这个或那个范数完备化而产生的. 正如后面定理 2.5 所证，每一个有限秩算子 A 总可以写成形式 $A=UT$，这里 U 为等距算子，而 T 为正定算子(即对于一切 x，有 $(Tx,x)\geqslant 0$). 记 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为算子 T 的特征值，则紧算子空间可以由有限秩算子空间按范数 $A=\max\limits_k \lambda_k h$ 完备化而得. 另外，我们今后只讨论映希尔伯特空间到另一个希尔伯特空间或映到本身内的算子.

定义 2.1 设 X 和 Y 是希尔伯特空间，A 是把 X 映到 Y 内的线性算子. 若 A 将 X 内的有界集映成 Y 内的相对紧集，则称 A 为**紧算子**或**全连续算子**.

定理 2.1 紧算子必有界，从而属于 $B(X,Y)$.

证: 设 A 非有界，则存在序列 $\{x_n\}\subset X$，使得 $\|x_n\|<1$，而且对于一切 n 有 $\|Ax_n\|>n$，于是对于 $\{x_n\}$ 的任一子序列 $\{x_{n_k}\}$，都不能使序列 $\{Ax_{n_k}\}$ 收敛，从而 A 不是紧的，矛盾. □

定理 2.2 A 是紧算子的充要条件是: A 把每个弱收敛的序列映成强收敛的序列.

证: 必要性. 设序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，而 $y_n\triangleq Ax_n$ 不是强收敛于 $y_0=Ax_0$，则必存在 $\varepsilon>0$ 和无限子序列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使不等式

$$\|y_{n_k}-y_0\|>\varepsilon_0 \tag{2.1}$$

成立，于是相应的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也弱收敛，从而依范数有界. 因为 A 是紧算子，所以集 $\{Ax_{n_k}\}=\{y_{n_k}\}$ 是列紧的，所以存在子序列 $\{y_{n_{k_j}}\}$ 强收敛于某一元素，设为 x_0'，于是它也弱收敛于 x_0'，即序列 $\{Ax_{n_{k_j}}\}$

弱收敛于 x_0'. 既然$\{x_n\}$弱收敛于 x_0, 序列$\{Ax_n\}$应弱收敛于 $Ax_0 = y_0$, 从而 $y_0 = x_0'$. 所以序列$\{y_{n_{k_j}}\}$强收敛于 y_0, 与 (2.1)式矛盾.

充分性. 设 A 把希尔伯特空间 X 中的弱收敛序列映成希尔伯特空间 Y 中的强收敛序列, M 是 X 内的有界子集. 由于 X 是自反空间, M 是弱列紧的, 从而 M 中的任意元素序列$\{x_n\}$必有一个弱收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$. 依假定, $\{Ax_{n_k}\}$是强收敛序列, 即 AM 是列紧集, 所以 A 是紧算子. □

注: 定理 2.2 是原来希尔伯特给出的紧算子定义.

定理 2.2 等价于下面应用方便的定理:

定理 2.3　A 是紧算子的充要条件是: 对于 X 为每一个弱收敛于零点的序列$\{x_n\}$, 总有 $Ax_n \to 0$ $(n\to\infty)$.

证: 必要性. 设 A 是紧算子, 由定理 2.2, 只须证明对于 X 内的每一个弱收敛于零点的序列$\{x_n\}$, 总有子序列$\{x_{n_k}\}$, 使得 $Ax_{n_k} \to 0$ 即可. 对于上述序列$\{x_n\}$, 由于 A 的紧性, 必存在子序列$\{x_{n_k}\}$, 使得$\{Ax_{n_k}\}$收敛, 设它的极限是 y_0. 因为$\{x_{n_k}\}$弱收敛于零点, 所以对于每一个 $y\in Y$, 由定理 2.1, A 的共轭算子 A^* 存在, 而且有

$$(y, Ax_{n_k}) = (A^*y, x_{n_k}) \to (A^*y, 0) = (y, 0),$$

即序列$\{Ax_{n_k}\}$弱收敛于零点, 所以$\{Ax_{n_k}\}$的极限存在而且等于零点.

充分性. 设算子 A 把 X 内的每一个弱收敛于零点的序列映为 Y 内收敛于零点的序列. 任取 X 内的弱收敛序列$\{x_n\}$, 设它弱收敛于 x, 则序列$\{x_n - x\}$弱收敛于零点. 由假设, $A(x_n - x) \to 0$, 所以序列$\{Ax_n\}$收敛. 由定理 2.2 知 A 是紧的. □

紧算子的性质可综述为下列定理:

定理 2.4　(1) 紧算子的线性组合仍是紧的;

(2) 有界线性算子与紧算子的乘积仍是紧的, 一切紧算子的集组成算子代数 $B(X,X)$的一个闭双边理想;

(3) A 是紧算子的充要条件是 A^*A 是紧的;

(4) A 是紧算子的充要条件是 A^* 是紧的;

(5) 设$\{A_n\}$是紧算子序列,而且$\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0$,则$A$也是紧算子.

证: (1)和(2)可由定义直接推出.紧算子集的闭性可由(5)推出,我们只证(3),(4)和(5).

(3) 若A是紧算子,则由(2),A^*A也是紧算子.反之,设A^*A是紧算子.若$\{x_n\}$是X内弱收敛于零点的序列,则由定理2.3,$A^*Ax_n\to 0$,于是

$$\|Ax_n\|^2=(Ax_n,Ax_n)=(A^*Ax_n,x_n)\to 0.$$

由定理2.3知A是紧的.

(4) 因为$(A^*)^*A^*=AA^*$,于是A是紧算子时由(2)和(3)得AA^*也是紧算子,从而A^*是紧算子,反之亦然.

(5) 设$\{x_n\}$是空间X内弱收敛于零点的序列,则$\{x_n\}$有界.设$\|x_n\|<C$,由定理2.3,只用证明$Ax_n\to 0$即可.

设给定$\varepsilon>0$,因为$\|A_n-A\|\to 0$,故必存在自然数m_0,使得

$$\|A_{m_0}-A\|<\frac{\varepsilon}{2C}.$$

因A_{m_0}是紧算子,于是有自然数N,使得$n>N$时,$\|A_{m_0}x_n\|<\frac{1}{2}\varepsilon$.

因此,当$n>N$时,有

$$\|Ax_n\|\leqslant\|(A-A_{m_0})x_n\|+\|A_{m_0}x_n\|<\varepsilon. \quad \Box$$

记一切紧算子所成的集为$B_\infty(X,Y)$,则有下列结论:

系 $B_\infty(X,Y)$依范数$\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$组成一个巴拿赫空间.

自共轭紧算子具有特别简单的结构.所谓**自共轭紧算子**,就是对空间X中的所有元素x和y适合$(Ax,y)=(x,Ay)$的紧算子A.这时可在X内选取标准正交基$\{e_n\}$,其中向量都是A的特征向量,即

$Ae_n=\lambda_n e_n$，而且对应于特征向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$ 都是实的，当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to 0$.

反之，对于标准正交基$\{e_n\}$，当 λ_n 为实数而且 $\lambda_n\longrightarrow 0$ 时，由公式 $Ae_n=\lambda_n e_n$ 给定的算子 A 必是自共轭紧算子.

若算子 A 是正定的，则它的所有特征值必然是非负的.

现在证明，任意的（一般说来，不必是自共轭的）紧算子仅与正定的紧算子相差一个等距算子（**等距算子**就是使 $\|Ux\|=\|x\|$ 的算子 U）. 换句话说，有下面定理：

定理 2.5 若 A 是把空间 X 映到空间 Y 内的紧算子，则它具有形式 $A=UT$，其中 T 是从 X 映到自身的正定算子，而 U 是从算子 T 的值域映到 Y 内的等距算子. 这时也称 A 有**标准分解**.

证： 考察自共轭算子 $B=A^*A$，由定理 2.4 的（3）知 B 是紧算子. 又因为对于任意 $x\in X$，有

$$(Bx,x)=(A^*Ax,x)=(Ax,Ax)\geqslant 0,$$

所以 B 是正定的. 由上述，算子 B 具有形式：$Be_n=\lambda_n e_n$，其中$\{e_n\}$是空间 X 内的标准正交基，$\lambda_n\geqslant 0$ 而且 $\lambda_n\to 0(n\to\infty)$. 现在引入新的算子 $T=B^{1/2}$，它是由等式 $Te_n=\sqrt{\lambda_n}e_n$ 定义的，自然有 $T^2=B$. 此外，显然，T 是紧算子而且是正常的.

比较 $\|Ax\|$ 与 $\|Tx\|$ 得

$$\|Ax\|^2=(Ax,Ax)=(A^*Ax,x)=(T^2x,x).$$

由于算子 T 是正定的，因而是自共轭的，因此

$$(T^2x,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|^2.$$

于是对任一 $x\in X$，$\|Ax\|=\|Tx\|$，即 A 与 T 等距. 现在对于一切形如 $y=Tx,x\in X$ 的元素 y，定义 $Uy=Ax$，则算子 U 是等距的. 因为 $y=Tx$，而 $\|Tx\|=\|Ax\|$，所以 $Ax=Uy=UTx$ 对一切 $x\in X$ 成立，即 $A=UT$. □

要注意的是，算子 U 定义在形如 Tx 的元素所成之集上，即在算子 T 的值域上. 由等距性，我们可以把它延拓到这个值域的闭包

上．不难看出，这个闭包是X内由对应于算子T的非零特征值λ_n的特征向量e_n所张成的闭子空间．

定理2.5使我们能给出紧算子(一般说来是非自共轭的)的几何描述．设$A=UT$为紧算子，$\{e_n\}$是正定算子T的正交特征向量，而$\lambda_n\geqslant 0$为相应的特征值．考察空间X内的球面$\|x\|=1$，算子T把这个球面映成椭球面，它的主轴沿向量$e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$的方向，半主轴的长为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$．算子$U$把这个椭球面映到空间$Y$内，结果得到空间$Y$内的椭球面，它的主轴按向量$h_n=Ue_n$的方向，而半主轴的长仍然是$\lambda_n$．又因为当$n\to\infty$时$\lambda_n\to 0$，所以这个椭球面的半主轴的长趋于零．

反之，任一算子A若将球面$\|x\|=1$映成椭球面而且半主轴之长趋于0，则A必是紧算子．

最简单的紧算子是形如$p(x)=\lambda(x,e)h$的算子p，其中e和h为固定的单位向量，而λ为定数．这个算子将全空间映为一维空间．不难证明，任一紧算子都可以用这些算子的和来逼近，即下列定理成立．

定理2.6 A为紧算子的充要条件是：对于任一$x\in X$，

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)h_n. \tag{2.2}$$

这里e_n(相应地h_n)为空间X(相应地空间Y)内的标准正交向量基，$\lambda_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$而且$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$．

证： 必要性．由定理2.3，$A=UT$．令e_n为算子T的特征向量，即$Te_n=\lambda_n e_n, Ue_n=h_n$．对任一$x\in X$，将$x$按算子$T$的特征向量$\{e_n\}$展开得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n,$$

于是
$$Ax=UTx=U\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n(x,e_n)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)h_n.$$

下边证明等式(2.2)内的级数依算子范数收敛，即由公式

$$A_k x=\sum_{n=1}^{k}\lambda_n(x,e_n)h_n$$

定义的算子 A_k 依范数收敛于算子 A. 置 $\|x\|=1$，因向量列 $\{h_n\}$ 是标准正交的，故有

$$\|(A-A_k)x\|^2=\sum_{n=k+1}^{\infty}\lambda_n^2|(x,e_n)|^2$$

$$\leqslant \Lambda_k^2\sum_{n=k+1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\leqslant \Lambda_k^2\|x\|^2=\Lambda_k^2,$$

这里 Λ_k 表示 $\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_{k+n},\cdots$ 中的最大值.

由上不等式得

$$\|A-A_k\|=\sup_{\|x\|=1}\|(A-A_k)x\|\leqslant \Lambda_k.$$

然而有 $\lim\limits_{k\to\infty}\Lambda_k=0$，故有

$$\lim_{k\to\infty}\|A-A_k\|=0.$$

充分性. 设(2.2)式成立. 令

$$A_k x=\sum_{n=1}^{k}\lambda_n(x,e_n)h_n,$$

则 A_k 将空间 X 映成空间 Y 内的有限维子空间，所以它们是紧算子. 又由必要性的证明知 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ 时

$$\lim_{k\to\infty}\|A-A_k\|=0.$$

由定理 2.4 知 A 是紧算子. □

显然，对于形如 (2.2) 式的算子 A，数 λ_n 总是分解式 $A=UT$ 内正定算子 T 的特征向量，而向量 h_n 为形如 Ue_n 的向量.

我们已顺便证明了下列命题：任一紧算子都是收敛于它的一列退化算子的极限. 因此，我们证明了紧算子空间和由退化算子所成的集按范数 $\|A\|$ 的完备化是一致的.

§ 3　希尔伯特-施米特型算子

在分析的许多问题中，如果只要求在紧算子 A 的分解式 $A=UT$ 中出现算子 T 的特征值 λ_n 趋于 0 是太弱了，必须对特征值的下降速度提出更强的要求. 满足这种条件的最常用的一种算子类，就是希尔伯特-施米特型算子类. 它不仅要求 $\lambda_n \to 0(n\to\infty)$，而且要求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<\infty$.

定义 3.1　若对于紧算子 $A=UT$，由算子 T 的特征值平方组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$ 收敛，则称算子 A 是**希尔伯特-施米特型算子**，简称 H-S 型算子.

用几何语言叙述，即希尔伯特-施米特型算子将球面 $\|x\|=1$ 映成椭球面，但半主轴之长的平方组成收敛级数.

定理 3.1　设 X 和 Y 都是希尔伯特空间，则 A 是从 X 到 Y 内的希尔伯特-施米特型算子的充要条件是它可以表示成下列形式：

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)h_n, \tag{3.1}$$

这里 $\{e_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 依次为 X，Y 内的标准正交基，$\lambda_n\geqslant 0$，而且使级

数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$收敛.

证：必要性. 设A为希尔伯特-施米特型算子，则A为紧算子，从而可以表示成下列级数形式：

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)h_n,$$

这里$\{\lambda_n\}$是出现在分解式$A=UT$中正定算子T的特征值. 因为A是希尔伯特-施米特型，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$收敛.

充分性. 设算子A能表示成(3.1)的形式，而且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$收敛，则$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$，因而$A$是紧算子，而且数$\lambda_n(n=1,2,\cdots)$是出现于分解式$A=UT$中正定算子$T$的特征值. 由假设，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$收敛，所以$A$是希尔伯特-施米特型算子. ▯

定理 3.2 算子A是希尔伯特-施米特型算子的充要条件是：对于空间X内的一个标准正交基$\{x_n\}$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2 \tag{3.2}$$

收敛，这时称级数的和的平方根为A的**希尔伯特-施米特范数**，记为$\|A\|_2$.

为了证明这个定理，我们需要下面两个引理.

引理 1 设A是映希尔伯特空间X到希尔伯特空间Y内的算子，$\{x_n\}$是X内的某一个标准正交基，而且级数(3.2)收敛，则对于X内任意别的正交基$\{y_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ay_n\|^2$收敛，而且等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|Ay_n\|^2 \tag{3.3}$$

成立，于是范数$\|A\|_2$与X内标准正交基的选取无关.

证： 在空间Y内任取标准正交基$\{z_n\}$，则

$$\|Ax_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(Ax_n,z_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x_n,A^*z_k)|^2.$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|(x_n,A^*z_k)|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|(x_n,A^*z_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|A^*z_k\|^2.$$

同理， $$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ay_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|A^*z_k\|^2.$$

所以等式(3.3)成立. □

引理2 若对于空间X内的某一个标准正交基$\{x_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2$收敛，则$\|A\|\leqslant\|A\|_2$.

证： 任取空间Y内的标准正交基$\{z_n\}$，则对于任意$x\in X$，

$$\|Ax\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax,z_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,A^*z_n)|^2$$

$$\leqslant\|x\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|A^*z_n\|^2=\|x\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2.$$

因此$\|Ax\|^2\leqslant\|x\|^2\|A\|_2^2$. 由此推出

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|\leqslant\|A\|_2. \quad □$$

现在来证明定理3.2.

必要性. 设A是希尔伯特-施米特型算子，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$收敛，

这里$\{\lambda_n\}$为分解式 $A=UT$ 内正定算子T的特征值. 令$\{e_n\}$为空间X内的标准正交基而且是由T的特征向量组成的，由于$\|Ax\|=\|Tx\|$,所以 $\lambda_n=\|Te_n\|=\|Ae_n\|$,于是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$$

收敛. 但由引理 1 知，当任取空间X内的标准正交基$\{x_n\}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2$收敛.

充分性. 只要证明A是紧算子即可. 事实上,若A为紧算子,则有分解式 $A=UT$. 而由引理 1，当$\{e_n\}$为算子T的标准正交向量基时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|^2$收敛. 因为 $\lambda_n=\|Ae_n\|$,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$收敛. 下边我们就来证明$A$是紧算子. 为此，定义退化算子$A_k$如下：

$$A_kx_n=\begin{cases}Ax_n, & 1\leqslant n\leqslant k\\ 0, & n>k\end{cases}$$

则 $$\|A-A_k\|^2\leqslant\|A-A_k\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|(A-A_k)x_n\|^2=\sum_{n=k+1}^{\infty}\|Ax_n\|^2.$$

由充分性假设知 $\lim\limits_{k\to\infty}\|A-A_k\|=0$, 因此$A$是一列退化算子$A_k$按算子范数收敛的极限. 因为退化算子是紧算子,由定理 2.5 的(5)知A也是紧算子. □

由定理 3.2 我们可以给出希尔伯特-施米特型算子的另一定义如下：

定义 3.2 设X和Y是希尔伯特空间,A是映空间X到空间Y内的有界线性算子. 若存在空间X内的标准正交基$\{x_n\}$，使得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2$收敛,则称算子$A$为希尔伯特-施米特型算子.

下边，我们叙述希尔伯特-施米特型算子的一些初等性质.

定理 3.3 (1) 希尔伯特-施米特型算子A的共轭算子A^*也是此类型算子；

(2) 设A是连续线性算子，B是希尔伯特-施米特型算子，则乘积AB与BA都是希尔伯特-施米特型算子，而且有$\|AB\|_2\leqslant\|A\|\|B\|_2$. 特别，若$A$也是希尔伯特-施米特型算子，则有$\|AB\|_2\leqslant\|A\|_2\|B\|_2$.

证： (1) 由定理 3.2 的引理 1 的证明中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|A^*z_k\|^2$$

即知.

(2) 对空间X内的任意标准正交基$\{x_n\}$有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|ABx_n\|^2\leqslant\|A\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|Bx_n\|^2.$$

由于B是希尔伯特-施米特型算子，所以不等式右边级数收敛，从而左边的级数也收敛，而且有$\|AB\|_2\leqslant\|A\|\|B\|_2$. 若$A$也是希尔伯特-施米特型算子，则由引理 2，$\|A\|\leqslant\|A\|_2$，所以$\|AB\|_2\leqslant\|A\|_2\|B\|_2$. 又由$BA=(A^*B^*)^*$，由(1)知$B^*$是希尔伯特-施米特型算子，于是由上面证明知$A^*B^*$也是此类型算子. 再由性质(1)即知$BA$是希尔伯特-施米特型算子. □

定理 3.4 全体希尔伯特-施米特型算子组成的集记为 HS，则它关于希尔伯特-施米特范数组成一个巴拿赫代数.

证： 显然，HS 是线性空间. 若$A\in\mathrm{HS}$，λ是数，则$\|\lambda A\|_2=|\lambda|\|A\|_2$. 由定理 3.2 之引理 1 的证明和闵可夫斯基不等式，有

$$\begin{aligned}\|A+B\|_2&=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|((A+B)x_n,z_k)|^2\right\}^{1/2}\\&\leqslant\left\{\sum_{n,k=1}^{\infty}|(Ax_n,z_k)|^2\right\}^{1/2}+\left\{\sum_{n,k=1}^{\infty}|(Bx_n,z_k)|^2\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

$$=\|A\|_2+\|B\|_2.$$

于是，由定理 3.3 知 HS 构成赋范代数．为了完成证明，只用证明 HS 依希尔伯特-施米特范数$\|\cdot\|_2$成为完备空间即可．

设$\{A_n\}$为 HS 内关于$\|\cdot\|_2$的柯西序列，由定理 3.2 之引理 2，$\{A_n\}$关于有界算子的范数$\|\cdot\|$也是柯西序列，于是存在有界算子A_0，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A_0\|=0.$$

因为序列$\{\|A_n\|_2\}$也是柯西序列，于是有上界，即存在常数M，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A_m x_n\|^2\leqslant M\quad(\forall m).$$

于是，对于任一自然数N，有

$$\sum_{n=1}^{N}\|A_m x_n\|^2\leqslant M\quad(\forall m).$$

从而$\|A_0\|_2=\sum_{n=1}^{\infty}\|A_0x_n\|^2$收敛，即$A_0\in$HS．又对于自然数$N$，任取$\varepsilon>0$，则有$m(\varepsilon)$，使得$p,m>m(\varepsilon)$时有$\|A_p-A_m\|<\varepsilon$．于是

$$\sum_{n=1}^{N}\|(A_0-A_m)x_n\|^2=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|(A_p-A_m)x_n\|^2$$

$$\leqslant\lim_{p\to\infty}\|A_p-A_m\|_2^2\leqslant\varepsilon^2.$$

从而当m充分大时有$\|A_0-A_m\|_2<\varepsilon$．　□

系　空间 HS 是希尔伯特空间一切有界线性算子所组成的巴拿赫代数的双边理想．

证：由定理的证明和定理 3.3 知 HS 是$B(X,Y)$的巴拿赫子代数，也是双边理想．　□

定理 3.5　HS 是希尔伯特空间．

证：设A和B都是希尔伯特-施米特型算子，定义内积为

$$(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax_n, Bx_n),$$

这里$\{x_n\}$为 X 内的标准正交基，则易知(A,B)是内积，而且$\|A\|_2 = \{(A,A)\}^{1/2}$，因此 HS 是希尔伯特空间. □

因为每一个希尔伯特-施米特型算子是一列退化算子按范数$\|\cdot\|_2$的极限(参看定理 3.2 之证)，于是一切退化算子之集在空间 HS 内稠密. 由于空间 HS 是完备的，故它是一切退化算子之集按范数$\|\cdot\|_2$的完备化.

关于希尔伯特-施米特型算子的进一步研究，可参看后面参考文献 37 和 50.

§4 核 算 子

1. 核算子概念

核算子比希尔伯特-施米特型算子具有更强的条件.

定义 4.1 设A为紧算子. 若由分解式 $A=UT$ 中算子T的特征值组成的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$收敛，则称$A$为**核算子**.

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$的收敛性可推出级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$的收敛性，因此一切核算子都是希尔伯特-施米特型算子.

核算子的几何意义是：算子A将空间X内的球面$\|x\|=1$映成空间Y的椭球面，而且它的半主轴之长组成收敛级数.

定理 4.1 A为核算子的充要条件是：A 可以表示为下列形式：

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x, e_n)h_n, \tag{4.1}$$

这里$\{e_n\}$和$\{h_n\}$依次为空间X和空间Y内的标准正交基，$\lambda_n \geq 0$，而且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$收敛.

证：由定义和定理2.6即知定理成立. □

对于正定算子来说，核算子概念与具有有限迹算子的概念是一致的.

定义 4.2 设A是希尔伯特空间X内的正定算子. 若对于空间X内的任意标准正交基$\{x_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(Ax_n, x_n)$收敛，则称$A$是**具有有限迹的算子**.

定理 4.2 紧的正定算子A为核算子的充要条件是：它具有有限迹.

证：必要性. 设A为正定核算子，令$A^{1/2}e_n=\sqrt{\lambda_n}e_n$，这里$\lambda_n$为算子$A$的特征值，而$e_n$为相应的特征向量. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}e_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty, \tag{4.2}$$

所以$A^{1/2}$是希尔伯特-施米特型算子，因此，对于任意标准正交基$\{x_n\}$，等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}e_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$$

成立. 又由于算子$A^{1/2}$的自共轭性，我们得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(A^{1/2}x_n, A^{1/2}x_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(Ax_n, x_n).$$

因此对于空间 X 内的任意正交基，等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Ax_n, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$$

成立，即算子 A 具有有限迹.

充分性. 设 A 是具有有限迹的紧正定算子. 在空间 X 内取由算子 A 的特征向量组成的标准正交基 $\{e_n\}$，则有等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n, e_n) < \infty.$$

于是，A 是核算子. ▯

系 任意核算子是等距算子与具有有限迹的正定算子的乘积，反之显然成立.

定理 4.3 算子 S 为核算子的充要条件是：它可以表示为两个希尔伯特-施米特型算子 A 和 B 的乘积.

证： 先设算子 B 将空间 X 映到空间 Y 内，而算子 A 将空间 Y 映到空间 Z 内. 又令 $AB = UT$，即算子 AB 分解成作用于空间 X 内的正定算子 T 和映算子 T 的值域到空间 Z 内的等距算子 U 的乘积. 在空间 X 内，由算子 T 的特征向量组成的标准正交基记为 $\{e_n\}$，$Te_n = \lambda_n e_n (n = 1, 2, \cdots)$，又用 $\{h_n\}$ 表示空间 Z 内由向量 $h_n = Ue_n$ 组成的标准正交基，则当 $\lambda_n \neq 0$ 时，有不等式

$$\begin{aligned}\lambda_n &= (Te_n, e_n) = (UTe_n, Ue_n)\\ &= (ABe_n, h_n) = (Be_n, A^* h_n)\\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|Be_n\|^2 + \|A^* h_n\|^2).\end{aligned} \tag{4.3}$$

现在来证明定理. 若 A 和 B 是希尔伯特-施米特型算子，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|Be_n\|^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\|A^* h_n\|^2$ 收敛. 由不等式(4.3)知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ 也收敛，因此 AB 是核算子.

反之，设 S 为核算子，令 $S=UT$ 为它按正定算子与等距算子乘积的分解，则由定理 4.2 必要性之证，算子 $T^{1/2}$ 是希尔伯特-施米特型算子．又由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|UT^{1/2}e_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|T^{1/2}e_n\|^2,$$

故算子 $UT^{1/2}$ 也是希尔伯特-施米特型算子①，然而 $S=(UT^{1/2})\cdot T^{1/2}$，所以算子 S 是两个希尔伯特-施米特型算子的乘积． □

系 1 核算子 A 的共轭算子 A^* 是核算子．

证： 若 $A=UT^{1/2}T^{1/2}$，则 $A^*=T^{1/2}(UT^{1/2})^*$，而算子 $(UT^{1/2})^*$ 作为希尔伯特-施米特型算子 $UT^{1/2}$ 的共轭算子也是此类型的，因此 A^* 是核算子． □

系 2 有界线性算子 A 与核算子 B 的乘积 AB 和 BA 都是核算子．

证： 令 $B=UT^{1/2}T^{1/2}$，这里 $UT^{1/2}$ 和 $T^{1/2}$ 都是希尔伯特-施米特型算子，因为 $AUT^{1/2}$ 也是希尔伯特-施米特型算子，从而 $AB=(AUT^{1/2})T^{1/2}$ 是两个希尔伯特-施米特型算子的乘积，所以 AB 为核算子．

又因 $BA=(A^*B^*)^*$，所以 BA 也是核算子． □

定理 4.4 算子 A 成为核算子的充要条件是：对于空间 X 内某一个标准正交基 $\{x_n\}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|$ 收敛．

证： 充分性．设 $\{x_n\}$ 是空间 X 内的标准正交基，而且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|^2$ 也收敛，因此，算子 A 是希尔伯

---

① 算子 U 定义在算子 T 的值域的包上．容易看出，这个包和算子 $T^{1/2}$ 的值域的包一致．上述两种情况所讲到的子空间，都是由相应于非零值 λ_n 的向量所张成的子空间，因此算子 $UT^{1/2}$ 有意义．

特-施米特型算子，从而A是紧算子，于是算子A可以表示成分解式$A=UT$. 因为$\|x_n\|=1$，而算子U在算子T的值域上是等距的，所以不等式

$$(Tx_n, x_n)\leqslant\|Tx_n\|=\|UTx_n\|=\|Ax_n\|$$

成立，于是由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|$的收敛性得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}(Tx_n, x_n)$的收敛性.再由定理 4.2 知$A$是核算子.

必要性. 设$A=UT$为核算子，取空间X内由算子T的特征向量$\{e_n\}$组成的标准正交基，则有等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n.$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|$收敛. □

注意，由算子A的核性并不能导出级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ax_n\|$对于空间$X$内所有标准正交基的收敛性，例如

例 4.1 设X为使模的平方和$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$收敛的序列$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$组成的希尔伯特空间，考察$X$内的向量$x_0=(1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots)$. 用$P$表示由空间$X$到向量$x_0$张成的子空间上的投影算子，因为算子$P$将空间$X$映成一维空间，所以它是核算子.

向量$e_n=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$（1 在第$n$位）组成标准正交基$\{e_n\}$，算子$P$将向量$e_n$映成

$$Pe_n=(e_n, x_0)x_0/\|x_0\|=x_0/(n\|x_0\|).$$

但级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Pe_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，因此若$A$为核算子，$\{e_n\}$为空间$X$

内的标准正交基，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|$可能发散.

2. 核算子空间

现在，我们研究所有核算子的集.我们将证明所有核算子组成线性空间，而且这个空间是退化算子空间按某种范数（所谓迹范数）的完备化，为此先证明下列定理：

定理 4.5 设A是将希尔伯特空间X映到希尔伯特空间Y内的核算子，则它具有形式：

$$\sup\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax_n, y_n)|=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n, \tag{4.4}$$

这里λ_n为出现在分解式$A=UT$中正定算子T的特征值，而上确界是对于空间X和Y内所有标准正交向量系$\{x_n\}$和$\{y_n\}$取的.

证： 用$\{e_n\}$表示空间X内算子T的相应于$\lambda_n\neq 0$的所有特征向量组成的标准正交系，记Ue_n为h_n，则

$$\lambda_n=(Te_n, e_n)=(UTe_n, Ue_n)=(Ae_n, h_n),$$

因而
$$\sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n, h_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n.$$

因为$\{e_n\}$和$\{h_n\}$依次是X和Y内的标准正交系，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\leqslant\sup\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax_n, y_n)|. \tag{4.5}$$

下面证明相反的不等式. 任取空间X和Y内的标准正交向量系$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，我们来估计级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax_n, y_n)|$. 因为算子$A$将算子$T$的相应于特征值零的特征向量映射成零，所以

$$(Ax_n, y_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_n, e_k)(Ae_k, y_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x_n, e_k)(Ue_k, y_n),$$

这里$\{e_k\}$为由算子T的相应于$\lambda_n \neq 0$的特征向量组成的标准正交系，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ax_n, y_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(x_n, e_k)(Ue_k, y_n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \{|(x_n, e_k)|^2 + |(Ue_k, y_n)|^2\}.$$

因为$\{x_n\}$和$\{y_n\}$依次为空间X和Y内的标准正交系，所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, e_k)|^2 \leqslant \|e_k\|^2 = 1$$

和
$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ue_k, y_n)|^2 \leqslant \|Ue_k\|^2 = 1.$$

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ax_n, y_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k,$$

从而
$$\sup \sum_{n=1}^{\infty} |(Ax_n, y_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k. \tag{4.6}$$

由(4.5)和(4.6)知(4.4)成立. □

由此立刻知道核算子组成线性空间. 事实上，只要证明两个核算子的和也是核算子，而这个命题可由下列不等式

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty} |((A+B)x_n, y_n)|$$

$$\leqslant \sup \sum_{n=1}^{\infty} |(Ax_n, y_n)| + \sup \sum_{n=1}^{\infty} |(Bx_n, y_n)|$$

立刻得出.

在核算子空间中,可以引进范数如下:令

$$\|A\|_1=\sup\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax_n,y_n)|, \tag{4.7}$$

这里上确界是对于空间 X 和空间 Y 内所有标准正交向量系取的. 由于 A 是核算子, $\|A\|_1$ 为非负实数,由定义和(4.7)容易验证:对于范数 $\|\cdot\|_1$, 有

$$\|A+B\|_1\leqslant\|A\|_1+\|B\|_1$$

和

$$\|\lambda A\|_1=|\lambda|\|A\|_1$$

成立,于是 $\|\cdot\|_1$ 满足范数公理. 由定理 4.5 知范数

$$\|A\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n,$$

即出现于核算子 A 的分解式 $A=UT$ 中正定算子 T 的迹, 因此, 范数 $\|A\|_1$ 称为迹范数.

注:不仅是迹范数,希尔伯特-施米特范数 $\|A\|_2$ 与范数 $\|A\|$ 都可以用出现于分解式 $A=UT$ 内算子 T 的特征值 λ_n 来表达, 即具有等式

$$\|A\|=\sup_n\lambda_n, \quad \|A\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n,$$

$$\|A\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\right)^{1/2}.$$

这三种范数由不等式 $\|A\|\leqslant\|A\|_2\leqslant\|A\|_1$ 联系着. 事实上, 不等式 $\|A\|\leqslant\|A\|_2$ 已在定理 3.2 的引理 2 内证明,而不等式 $\|A\|_2\leqslant\|A\|_1$ 由 $\lambda_n\geqslant0$ 和不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)^2$$

推出.

这三种范数都是等距不变的,即对于算子 A, UA 和 AU, 这些范数一致,这里U 是等距算子.

可以写出算子T的特征值的所有函数 $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 它们使等式

$$\|A\|=f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad A=UT$$

给出退化算子空间上等距不变的范数,即 $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 应该是正的一级齐次函数,关于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是对称的而且对于所有变元将此函数延拓后成为 n 维空间上的凸函数. 我们所考察的$\sup\limits_k\lambda_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$都适合这些条件.

定理 4.1 证明了任意核算子 $A=UT$ 可以写成形式:

$$Ax=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x,e_k)h_k,$$

这里$\{e_k\}$为算子T的特征向量组成的空间X的标准正交基, λ_k 为相应的特征值,而 $h_k=Ue_k, \lambda_k\geqslant0$, 级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ 收敛, 于是由定理 4.5 得

$$\|A-A_n\|_1=\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k,$$

这里 A_n 是由公式

$$A_nx=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x,e_k)h_k$$

定义的算子,所以

$$\lim_{n\to\infty}\|A-A_n\|_1=0.$$

因此，任意核算子是一列退化算子 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 按迹范数的极限.

现在来证明，核算子空间是退化算子空间按迹范数的完备化. 为此，只要证明核算子空间按迹范数是完备的. 先证明下列定理：

定理 4.6 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列核算子，它们的迹范数 $\|A_n\|_1$ 全体是有界的，而且序列 $\{A_n\}$ 弱收敛于算子 A，则算子 A 也是核算子.

证： 由于迹范数序列 $\{\|A_n\|_1\}$ 有界，故存在常数 $M>0$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(A_n x_k, h_k)|\leqslant M$$

对所有标准正交系 $\{x_k\}$ 和 $\{h_k\}$ 及所有算子 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 成立. 设 s 为任一自然数，在不等式

$$\sum_{k=1}^{s}|(A_n x_k, h_k)|\leqslant M$$

内令 $n\to\infty$ 取极限，由于序列 $\{A_n\}$ 的弱收敛性，所以

$$\lim_{n\to\infty}(A_n x_k, h_k)=(Ax_k, h_k).$$

于是有
$$\sum_{k=1}^{s}|(Ax_k, h_k)|\leqslant M.$$

这样就有不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(Ax_k, h_k)|\leqslant M.$$

因为 $\{x_k\}$ 和 $\{h_k\}$ 依次为空间 X 和空间 Y 内的任意标准正交系，所以

$$\sup\sum_{k=1}^{\infty}|(Ax_k, h_k)|\leqslant M,$$

因而A为核算子. □

注意,特别地,由此推出:若序列$\{A_n\}$弱收敛于A,则

$$\|A\|_1 \leqslant \sup_n \|A_n\|_1.$$

定理 4.7 核算子空间对于迹范数是完备的.

证: 设核算子序列$\{A_n\}$对范数$\|A\|_1$是柯西序列,则它关于范数$\|A\|$也是柯西序列. 由连续线性算子空间关于范数$\|A\|$的完备性,存在连续线性算子A,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|A-A_n\|=0$. 由此推出算子序列$\{A_n\}$弱收敛于$A$,由定理4.6知$A$为核算子.

现在证明,序列$\{A_n\}$按迹范数$\|A\|_1$收敛于A,即

$$\lim_{n\to\infty}\|A-A_n\|_1=0.$$

因为序列$\{A_n\}$对迹范数$\|A\|_1$是柯西序列,故$\forall \varepsilon>0$,$\exists N\in \mathbf{N}$,使得当$m>N$且$n>N$时有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|((A_m-A_n)x_k,h_k)|\leqslant\|A_m-A_n\|_1<\varepsilon,$$

这里$\{x_n\}$和$\{h_n\}$依次是空间X和空间Y内的任意标准正交基,于是,当$m>N$,$n>N$时,对任意自然数s,不等式

$$\sum_{k=1}^{s}|((A_m-A_n)x_k,h_k)|<\varepsilon$$

成立.

由算子序列$\{A_m\}$弱收敛于A推出,当$n>N$时,对于所有s,不等式

$$\sum_{k=1}^{s}|(A-A_n)x_k,h_k)|<\varepsilon.$$

因此,当$n>N$时,就有

$$\|A-A_n\|_1=\sup\sum_{k=1}^{\infty}|((A-A_n)x_k,h_k)|<\varepsilon,$$

从而核算子空间对迹范数是完备的. □

正如我们已指出的，由此推出核算子空间是退化算子空间按迹范数的完备化.

§5 核 空 间

1. 可列希尔伯特空间

在建立了拓扑线性空间的一般理论，特别是赋可列范空间理论之后，产生的基本问题之一是如何挑选一类空间，使它一方面能用简单的条件决定出来，另一方面能很好地为分析所用. 核空间就是这类空间之一. 为了研究核空间，先给出可列希尔伯特空间概念.

把线性空间 X 上的严格正定埃尔米特 (Hermite) 泛函 (x,y) 称为此空间上的**内积**，即它是适合下述条件的泛函：

(1) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$；

(2) $(ax,y)=a(x,y),a\in K$；

(3) $(x,y)=\overline{(y,x)}$；

(4) $(x,y)\geqslant 0$，而且 $(x,x)=0$ 的充要条件是 $x=0$.

令 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$，则空间 X 上的每一个内积对应着一个范数 $\|x\|$. 现在假定空间 X 上已给出可列个内积 $(x,y)_n$ $(n=1,2,\cdots)$，而且这些内积按照下面意义是和谐的：若空间 X 内的元素序列 $\{x_k\}$ 按照范数 $\|x\|_m=\sqrt{(x,x)_m}$ 收敛于零而且按范数 $\|x\|_n$ 是柯西序列，那么它按照范数 $\|x\|_n$ 也收敛于零.

在空间 X 内引进下列拓扑：$\forall \varepsilon>0,\forall n\in \mathrm{N}$，令

$$U_{n,\varepsilon}=\{x\mid \|x\|_n<\varepsilon\},$$

则 $U_{n,\varepsilon}$ 的全体组成空间 X 内零点的邻域基.

定义 5.1 若线性空间 X 具有可列个内积，而且关于上面指

出的拓扑是完备的，则称空间 X 为**可列希尔伯特空间**.

注：显然，可列希尔伯特空间必为赋可列范空间，因为希尔伯特范数 $\|x\|_n=\sqrt{(x,x)_n}$ 是巴拿赫范数的特殊情况. 然而，由于我们考察的是可列个范数，所以存在于个别巴拿赫范数之间的差别常常消失. 例如具有连续导函数的函数类与导函数的模为平方可积的函数类是不同的，然而，具有任意阶连续导函数的函数类与任意阶导函数为平方可积的函数类显然是一致的.

在给定的可列希尔伯特空间中，往往可以将范数序列 $\{\|x\|_n\}$ 换成由内积给出的范数序列而不改变这个空间的拓扑结构.

在可列希尔伯特空间 X 内，我们通常考察这样一类内积 $(x,y)_n$ $(n=1,2,\cdots)$，它使得对于 X 内任意元素 x，不等式

$$(x,x)_1\leqslant(x,x)_2\leqslant\cdots\leqslant(x,x)_n\leqslant\cdots$$

成立，否则可以用新的内积序列

$$(x,y)'_n\triangleq\sum_{k=1}^{n}(x,y)_k$$

代替内积序列 $(x,y)_n$ 而不改变空间 X 的拓扑结构，此时内积序列 $(x,y)'_n$ 满足

$$(x,x)'_1\leqslant(x,x)'_2\leqslant\cdots\leqslant(x,x)'_n\leqslant\cdots.$$

仿赋可列范空间，我们可把空间 X 按内积 $(x,y)_n$ 的完备化记为 X_n，则显然 X_n 也是希尔伯特空间，而且由空间 X 的完备性推出

$$X=\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n.$$

反之，若拓扑线性空间 X 的拓扑结构由可列个内积 $(x,y)_n$ 给定，而且空间 X 与由 X 按这些内积的完备化空间的交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n$ 一致，则空间 X 一定是完备的，因而也是可列希尔伯特空间.

下面，我们需要把空间 X 内的某些元素看成相应的希尔伯特空间 X_n 内的元素. 当这样可能引起误解时，就把 x 改写成 $\overset{(n)}{x}$，这样一来，空间 X 内的同一个元素 x 看成不同空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 内的元素时记为 $\overset{(1)}{x}, \overset{(2)}{x}, \cdots, \overset{(n)}{x}, \cdots$.

2. 可列希尔伯特空间的共轭空间

现在考察可列希尔伯特空间 X 的共轭空间 X^* 的结构. 类似于赋可列范空间，我们有下列定理：

定理 5.1 设空间 X_n 是可列希尔伯特空间 X 依内积 $(x,y)_n$ 的完备化，X_n^* 是空间 X_n 的共轭空间 $(n=1,2,\cdots)$，则 $X^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*$.

证： 设 $f \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*$，则存在自然数 n_0，使得 $f \in X_{n_0}^*$，即 f 是希尔伯特空间 X_{n_0} 上的连续线性泛函. 于是，f 也是空间 X 上的连续线性泛函，即 $f \in X^*$.

另一方面，设 $f \in X^*$，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在邻域

$$U \triangleq \{x \mid \|x\|_n < \delta\},$$

使得 $\forall x \in U$，都有 $|(f,x)| \leqslant \varepsilon$，因而当 $\|x\|_n < \delta$ 时有 $|(f,x)| \leqslant \varepsilon$，即 f 按范数 $\|x\|_n$ 连续，亦即 $f \in X_n^*$，所以等式成立. □

注意，X_n^* 组成单调增加的序列 $X_1^* \subset X_2^* \subset \cdots \subset X_n^* \subset \cdots$. 事实上，由于 $m \leqslant n$ 时，$(x,x)_m \leqslant (x,x)_n$，于是从线性泛函 f 在球 $(x,x)_m \leqslant 1$ 上的有界性推出它在球 $(x,x)_n \leqslant 1$ 上的有界性，即从 $f \in X_m^*$ 推出 $f \in X_n^*$.

空间 X_n^* 是希尔伯特空间 X_n 的共轭空间，其上的范数记为 $\|f\|_{-n}$. 这个范数由等式

$$\|f\|_{-n} = \sup_{\|x\|_n = 1} |(f,x)|$$

定义. 由于 X_n^* 也是希尔伯特空间，所以范数 $\|f\|_{-n}$ 可以由 X_n^* 上的内积 (f,g) 定义，换句话说，下列等式成立：

$$\|f\|_{-n}=\sqrt{(f,f)_{-n}}\ .$$

有时我们不得不把空间 X^* 内的同一个元素看成不同空间X_n^*内的元素，这时，如同对空间 X 内的元素一样，我们采用记号 $\overset{(1)}{f},\overset{(2)}{f},\cdots,\overset{(n)}{f},\cdots$. 这时，若 $m\leqslant n$ 而且 $f\in X_m^*$,则对空间 X 内的任意元素x,等式

$$(\overset{(m)}{f},\ \overset{(m)}{x})=(\overset{(n)}{f},\ \overset{(n)}{x})$$

成立. 事实上，这个等式的两边都是连续线性泛函 f 在 X 内元素x上的值.

空间 X^* 中的拓扑可以用不同方法给出. 例如，可取**弱拓扑**，它由下列零点的邻域基组成：

$$U(x_1,x_2,\cdots,x_m;\varepsilon)\triangleq\{f\ |\ |(f,x_k)|<\varepsilon,k=1,\cdots,m,\varepsilon>0\}.$$

为了定义空间 X^* 中的**强拓扑**，我们先引进 X 中的有界集概念. 设 $A\subset X$，若对于每一个自然数 k，当 x 在 A 中变化时，数 $(x,x)_k$ 组成有界集，则称 A 为有界集. 这时，对于空间 X 中零点的任何邻域 U，必有 n，使得 $A\subset nU$. 命

$$U(A,\varepsilon)=\{f\ |\ \sup_{x\in A}|(f,x)|<\varepsilon,A\text{ 是有界集},\varepsilon>0\},$$

则 $U(A,\varepsilon)$组成 X^*的强拓扑意义下零点的邻域系.

可以证明，每个空间 X_n^*按 X^*的弱拓扑在 X^*内稠密.

在 X^*内也可以引进弱有界集与强有界集概念. 设 $A\subset X^*$，当它对于 X^*中零点的任何强(弱)邻域 U，存在 n，使得 $A\subset nU$ 时，就称 A 为**强(弱)有界**的. 由于空间 X^* 内零点的任何弱邻域都是零点的强邻域，所以 X^*内的强有界集必为弱有界集.

现在考察空间X^* 的共轭空间 X^{**}. 在这个空间内也可以引进不同的拓扑，它们分别由空间X^* 内的有限集、强有界集和弱有界集引出. 我们将构造由 X^* 内强有界集引出的空间 X^{**}的拓扑. 命

$$U(A,\varepsilon)=\{\hat{x}\ |\ \sup_{f\in A}|(\hat{x},f)|<\varepsilon,A\text{ 为强有界集},\varepsilon>0\},$$

则 $U(A,\varepsilon)$ 的全体作为 X^{**} 内零点的邻域基.

在这个拓扑下，第二共轭空间 X^{**} 与原来的可列希尔伯特空间 X 同构，即 $X = X^{**}$. 适合等式 $X = X^{**}$ 的拓扑线性空间称为自反空间.

定理 5.2 可列希尔伯特空间 X 是自反空间.

证： 任取 $x\in X$，定义泛函 $\hat{x}$: $X\to X^{**}$ 为

$$(\hat{x}, f) = (f, x),$$

这里 $f\in X^*$，则 $\hat{x}$ 是 X^* 上的连续线性泛函，而且对应 $x\mapsto\hat{x}$ 把空间 X 单值地嵌入空间 X^{**}. 另一方面，空间 $X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^*$ 上的连续线性泛函 $\hat{x}$ 也是每一个希尔伯特空间 X_n^* 上的连续线性泛函. 由于希尔伯特空间是自反的，因此 $\hat{x}$ 可以看成由空间 X 按每个内积 $(x,y)_n$ 完备化所得的各个空间 X_n 内的元素. 然而，$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$，所以 $\hat{x}\in X$，这说明上述对应是一对一的，而且空间 X 和 X^{**} 所含元素一致.

为了证明定理 5.2，我们还应证明上述对应是同胚的. 在第一章中已知赋可列范空间 $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ 的共轭空间 X^* 中每一个强有界集 A 必属于某一个空间 X_n^*，而且在其上依范数 $\|f\|_{-n}$ 有界. 任取 X^{**} 中零点的邻域 $U(A, \varepsilon)$，于是有界集 A 在某一个希尔伯特空间 X_n^* 上有界，因而落在一个球 $\|f\|_{-n}<a$ 内. 现在考察 X 内的球 $\|x\|_n<\varepsilon/a$，对于其中每一个元素 x 和球 $\|f\|_{-n}<a$ 内的每一个泛函 f，总有 $|(f,x)|<\varepsilon$，因而对于集 A 中的泛函更是如此. 换句话说，球 $\|x\|_n<\varepsilon/a$ 的像落在零点的邻域 $U(A, \varepsilon)$ 中，就是说映射 $x\mapsto\hat{x}$ 是连续的.

同理，设 $\|x\|_n<\varepsilon$ 为空间 X 内的球，令

$$A=\{f \mid \|x\|_n<\varepsilon \text{ 时 } |(f,x)|<1\},$$

则 A 是 X^* 内的强有界集. 显然，空间 X^{**} 内零点的邻域 $U(A,\varepsilon)$ 的像落在球 $\|x\|_n<\varepsilon$ 中，由此证明了逆映射的连续性，从而映射 $x\mapsto\hat{x}$ 是同胚的.

综上所述，我们证明了空间 X 和 X^{**} 不仅所含元素一致，而且拓扑也一致，即 X 是自反的. □

3. 核空间

做了上边的准备工作后，就可以研究核空间了. 设 X 是可列希尔伯特空间，考察空间 X 依范数 $\|x\|_n=\sqrt{(x,x)_n}$ 完备化所得的希尔伯特空间 X_n. 由于 $m\leqslant n$ 时 $(x,x)_m\leqslant(x,x)_n$，于是映射 $\overset{(n)}{x}\mapsto\overset{(m)}{x}$ 是 X_n 的稠密子集 X 到 X_m 的稠密子集上的连续映射（注意：$\overset{(n)}{x}$ 和 $\overset{(m)}{x}$ 表示空间 X 内同一个元素 x 看成 X_n 和 X_m 内的元素的结果）. 我们可以把这个映射看成将空间 X_n 映射到空间 X_m 的稠密子集上的连续线性算子 T_m^n，则 $m\leqslant n\leqslant p$ 时 $T_m^p=T_m^nT_n^p$.

定义 5.2 设 X 是可列希尔伯特空间. 如果对于任意自然数 m，存在自然数 n，使得空间 X_n 到空间 X_m 内的算子 T_m^n 是核算子，即具有形式

$$T_m^nx=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x,x_k)_ny_k,\quad x\in X_n$$

这里 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 依次是 X_n 和 X_m 内的标准正交系，$\lambda_k\geqslant0$，而且级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ 收敛，则称 X 是**核空间**.

注：这里核空间的定义与第 0 章 §3 中线性映射的核空间定义不同.

这个定义的几何意义是：若 X 是可列希尔伯特空间，而且对于任意自然数 m，必有自然数 n，使得集 $(x,x)_n\leqslant1$ 关于内积 $(x,x)_m$

成为椭球，其半主轴的长组成收敛级数，则X是核空间.

注意，核空间定义中可以仅要求T_m^n为希尔伯特-施米特型算子的乘积为核算子，因而，若算子T_n^p和T_m^n为希尔伯特-施米特型的，则$T_m^p=T_m^nT_n^p$是核算子.

为了应用，需要找出判别核空间的充要条件，我们先引进下面的概念.

定义 5.3 设$\sum_{k=1}^{\infty}f_k$是定义在拓扑线性空间X上的泛函级数.如果对空间X内的任意元素x，级数$\sum_{k=1}^{\infty}|(f_k,x)|$收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k$**无条件收敛**. 如果存在空间$X$内零点的邻域$U$，使得级数$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_U$收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k$**绝对收敛**. 这里

$$\|f_k\|_U=\sup_{x\in U}|(f_k,x)|.$$

显然，绝对收敛级数一定无条件收敛，但在核空间内二者等价，即有

定理 5.3 设X是核空间，则X上无条件收敛的连续线性泛函级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k$一定绝对收敛.

先证明下面引理.

引理 若$\sum_{k=1}^{\infty}f_k$是可列希尔伯特空间X上连续线性泛函组成的无条件收敛级数，则存在实数M和m，使得对于空间X内的所有元素x，不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f_k, x)| \leqslant M\|x\|_m \tag{5.1}$$

成立.

证: 令 $p(x) = \sum_{k=1}^{\infty}|(f_k, x)| \quad (x \in X)$，则$p(x)$处处取有限值.

令$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n}|(f_k, x)|$，于是

$$p(x) = \sup_n p_n(x). \tag{5.2}$$

因为每一个凸泛函 $p_n(x)$ 是连续的，所以如在定理1.3 所证，泛函 $p(x)$ 是凸的，而且是下半连续的，从而由定理 1.5 知泛函 $p(x)$ 在空间X内零点的某一个邻域上有界. 由此推出，存在实数M和m，对于X内一切x，有$p(x) \leqslant M\|x\|_m$成立. □

由引理知，对于任意自然数k，不等式

$$|(f_k, x)| \leqslant M\|x\|_m$$

成立，所以$\|f_k\|_{-m} \leqslant M$. 这样一来，若$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 是可列希尔伯特空间X上的无条件收敛级数，那么必有实数m，使得数$\|f_k\|_{-m}$的全体是有界的. 特别，所有的泛函f_k属于空间X_m^*.

现在证明定理5.3. 设空间X是核的，而且$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 是X上的连续线性泛函所组成的无条件收敛级数，则由刚才所证，必存在实数M和m，使得所有的泛函 $f_k \in X_m^*$，而且$\|f_k\|_{-m} \leqslant M$.

依条件X是核空间，必存在自然数n，使得从空间X_n到空间X_m的算子T_m^n是核的. 下边证明级数$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{-n}$收敛.

因为映射T_m^n: $X_n \to X_m$是核算子，所以可在空间X_n和X_m内取

标准正交系$\{x_k\}$和$\{y_k\}$，使得对于空间X_n内的一切元素x，有

$$\overset{(m)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{(n)}{(x, x)}_n y_k$$

成立，这里$\lambda_k \geqslant 0$，而且级数$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$收敛. 这意味着对于任意$x \in X$和$X$上的任意泛函$f$，等式

$$(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_n (f, y_k)$$

成立. 然而，因为$\|x_k\|_n = 1$，所以$|(x, x_k)_n| \leqslant \|x\|_n$，因而

$$|(f, x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(f, y_k)| \|x\|_n.$$

这意味着

$$\|f\|_{-n} = \sup_{\|x\|_n = 1} |(f, x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(f, y_k)|.$$

将这个不等式应用于泛函$f_1, \cdots, f_j, \cdots$，而且依照对j所得到的这些不等式求和，即得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{-n} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{\infty} |(f_j, y_k)|.$$

因而由不等式(5.1)得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{-n} \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|y_k\|_m = M \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k,$$

即级数$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{-n}$收敛. □

现在证明，其逆定理亦真.

定理5.4 若在可列希尔伯特空间X上一切无条件收敛的连

续线性泛函级数$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$都绝对收敛，则空间X为核空间.

证：依核空间定义，必须证明对于任意自然数m和n，使得空间X_n到X_m的映射是希尔伯特-施米特型算子. 由于希尔伯特-施米特型算子的共轭算子也是此类型的，故只要证明存在正整数n，使得空间X_m^*到X_n^*的映射$(T_m^n)^*$是希尔伯特-施米特型算子即可.

在希尔伯特空间X_m^*内，任取标准正交基$\{f_k\}$，我们将证明，存在正整数$n>m$，使得级数$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|^2_{-n}$收敛，这就意味着由等式$(T_m^n)^* \overset{(m)}{f_k} = \overset{(n)}{f_k}$给出的算子$(T_m^n)^*$是希尔伯特-施米特型的.

由于空间X_m^*内基$\{f_k\}$的正交性，对于任意元素$x\in X$，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f_k,x)|^2 \tag{5.3}$$

收敛.

考察使$\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^2$收敛的数列$\{d_k\}$，由级数(5.3)的收敛性知，连续线性泛函级数$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(f_k,x)$对于任意元素$x\in X$收敛，即级数$\sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k$无条件收敛. 依定理条件，级数$\sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k$绝对收敛. 换句话说，存在正整数$r$（它依赖于序列$\{d_k\}$的选取）使级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|\,\|f_k\|_{-r} \tag{5.4}$$

收敛. 用H表示使级数$\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^2$收敛的数列$d\triangleq\{d_k\}$的全体所组成

的希尔伯特空间，令

$$p_r(d)=\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|\ \|f_k\|_{-r}.$$

则 $\{p_r(d)\}$ 为此空间上的泛函序列．因为空间 X 上的任意泛函 f 满足不等式

$$\|f\|_{-1}\geqslant\|f\|_{-2}\geqslant\cdots\geqslant\|f\|_{-r}\geqslant\cdots,$$

所以泛函 $p_r(d)$ 适合不等式

$$p_1(d)\geqslant p_2(d)\geqslant\cdots\geqslant p_r(d)\geqslant\cdots.$$

由于对任意 $d\in H$，总存在正整数 r，使得级数 (5.4) 收敛，即 $p_r(d)$ 是有限泛函，然而

$$p_r(d)=\sup_j\{p_{r_j}(d)\},$$

这里 $p_{r_j}(d)\triangleq\sum_{k=1}^{j}|d_k|\,\|f_k\|_{-r}$ 是空间 H 上的连续凸泛函，所以泛函 $p_r(d)$ 是下半连续的，而且是凸的．应用定理 1.6 于泛函序列 $\{p_r(d)\}$，存在实数 M 和正整数 n，使得 $p_n(d)\leqslant M\|d\|$．这里 $\|d\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^2$，于是级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|\,\|f_k\|_{-n}$ 对于空间 H 内的所有元素 d 收敛，由数项级数收敛的判别法即得级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{-n}^2$ 的收敛性①．

综上所述，对于空间 X_n^* 内的任意标准正交基 $\{f_k\}$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{-n}^2$ 收敛，即空间 X_m^* 到空间 X_n^* 内的映射 $(T_m^n)^*$ 是希尔伯

---

① 若对于任意选取的适合条件 $\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^2<\infty$ 的实数 d_k，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_kd_k$ 收敛，则数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$ 也收敛．

特-施米特型算子，所以X是核空间. □

由定理5.3和定理5.4可得下列重要结论：

定理 5.5 可列希尔伯特空间X为核空间的充要条件是：X内的任意无条件收敛连续线性泛函级数是绝对收敛的.

换句话说，核空间也可定义为在其上一切无条件收敛的连续线性泛函级数必为绝对收敛的可列希尔伯特空间.

4.核空间的性质

定理 5.6 设X是可列希尔伯特核空间，则

(1) X的闭子空间A仍是可列希尔伯特核空间；

(2) 商空间X/A仍是核空间；

(3) X是完全空间.

证：(1) 显然，空间X上的任意内积$(x,y)_n$给出空间A上的内积. 由空间X的完备性和A的闭性知A也是完备空间，因而A是可列希尔伯特空间. A也是核空间. 事实上，对于任意自然m，选取自然数n，使得空间X_n到空间X_m的映射T_m^n是核的，那么，映射T_m^n所导出的由空间A_n(空间A关于内积$(x,y)_n$的完备化空间)到空间A_m的映射也是核的. 这点可如下推出：对于空间A_n和A_m内的任意标准正交系$\{x_k\}$和$\{y_k\}$，级数$\sum_{k=1}^{\infty}|(T_m^n x_k,y_k)_n|$收敛.

(2) 先证商空间X/A是完备空间. 任取X内固定元素x_0，考察一切形如$x=x_0+a\ (a\in A)$的元素所组成的集，即按闭子空间A组成的剩余类. 记这个剩余类为x_0+A，则由所有A的剩余类组成的空间X/A是线性空间，为此只要令

$$(x_1+A)+(x_2+A)=x_1+x_2+A$$

和

$$\lambda(x_1+A)=\lambda x_1+A$$

即可.

若空间X是赋范的，则令

$$\|x_1+A\|=\inf_{a\in A}\|x_1+a\|,$$

就使商空间 X/A 成为赋范空间．若空间 X 是完备的，显然这个空间也是完备的．若令

$$(x+A,x+A)_n=\inf_{a\in A}(x+a,x+a)_n,$$

则商空间 X/A 成为可列希尔伯特空间．下面证明它也是核空间．为此，考察商空间 X/A 上无条件收敛的连续线性泛函级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$．对于每一个线性连续泛函 f_k，作空间 X 上相应的连续线性泛函 F_k 如下：$\forall x\in X$，令

$$(F_k,x)=(f_k,x+A).$$

显然级数 $\sum_{k=1}^{\infty}F_k$ 也是无条件收敛的．利用空间 X 的核性知存在自然数 m，使得级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k\|_{-m}$ 收敛．然而

$$\|F_k\|_{-m}=\sup_{\|x\|_m\leqslant 1}|(F_k,y)|=\sup_{\|x\|_m\leqslant 1}|(f_k,x+A)|=\|f_k\|_{-m},$$

因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{-m}$ 收敛，所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ 绝对收敛，即空间 X/A 是核的．

(3) 设 A 是核空间 X 内的强有界集(即对于零点的任意邻域 U，存在实数 $\lambda>0$，使得 $\lambda A\subset U$)，而且是闭集，把 A 看成希尔伯特空间 X_n 内的子集时记作 A_n，由集 A 的有界性知所有的集 A_n 都是有界的．又对任意自然数 m 和 n ($n>m$)，等式 $T_m^nA_n=A_m$ 成立，这里 T_m^n 是空间 X_n 到空间 X_m 的嵌入算子．由于空间 X 的核性，对于任意 m，必有 $n>m$，使得 T_m^n 为核算子，因而是紧算子．然而紧算子映有界集 A_n 为相对紧集 A_m，即闭包 $\bar{A}_m$ 是紧的，因此交集 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\bar{A}_m$ 也是

紧的(这里集A_m的闭包是指在X_m内取的).

为了完成定理5.6的证明,还要证明$A=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bar{A}_m$. 设$x\bar{\in}A$,因为$A$是$X$内的闭集,所以存在零点的邻域$U$,使得$x+U$不与$A$相交.若这个邻域由不等式$\|x\|_m<\varepsilon$给出,则$x\bar{\in}\bar{A}_m$,因而$x\bar{\in}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bar{A}_m$,这就证明了$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bar{A}_m\subset A$. 又显然有$A\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}\bar{A}_m$,所以等式成立,即$A$是紧的. □

系 有限维空间是核空间,而无限维巴拿赫空间不是核空间.

证: 因为有限维空间上的恒等映射是核算子,而无限维巴拿赫空间内的球是非紧的有界集. □

由于一切核空间都是完全空间,所以第一章的定理6.2, 6.3, 6.7和6.8关于核空间也成立.

5. 双线性泛函

我们首先讨论赋可列范空间上的双线性泛函. 显然,赋可列范空间X上任一连续线性泛函f具有有限阶,即对于某一个范数$\|x\|_n$是连续的. 事实上,由于f的连续性,存在一个由不等式$\|x\|_n<\delta$确定的邻域U,使得在其上成立不等式$|(f,x)|\leqslant 1$,因而当$\|x\|_n<\varepsilon\delta$时$|(f,x)|<\varepsilon$,即$f$依范数$\|x\|_n$连续.

现在证明关于双线性泛函的类似结论. 设$F(x,y)$是双线性泛函,x与y依次在赋可列范空间X与Y内变化. 若固定x时,泛函$F(x,y)$对于y连续,而且固定y时对于x也连续,则称$F(x,y)$对于每一个变元连续.

定理5.7 设$F(x,y)$是赋可列范空间$X\times Y$上的双线性泛函,而且对于每一个变元连续,则在空间X与Y上必有范数$\|x\|_n$与$\|y\|_m$,使得泛函$F(x,y)$按上述范数对x与y是二元连续的. 换句

话说，存在范数$\|x\|_n$与$\|y\|_m$，使得对于所有元素x及y，满足不等式

$$|F(x,y)|\leqslant M\|x\|_n\|y\|_m, \tag{5.5}$$

这里M是常数，$\|x\|_n$和$\|y\|_m$依次表示空间X与Y中的范数.

证：对于每一个自然数n，由等式

$$p_n(y)=\sup_{\|x\|_n\leqslant 1}|F(x,y)| \tag{5.6}$$

定义空间Y上的一个泛函$p_n(y)$. 这个泛函可以取有限或无限值，但对于每一点y_0，必存在自然数n（与y_0有关），使得$p_n(y_0)$取有限值. 事实上，对于固定的点y_0，$F(x,y_0)$是空间X上的连续线性泛函，而赋可列范空间X上的任一连续线性泛函必对于某一个范数$\|x\|_n$连续，即存在自然数n，使$F(x,y_0)$在球$\|x\|_n\leqslant 1$上有界，所以，由(5.6)知$p_n(y_0)$是有限值.

现在证明，这些泛函$p_n(y)$是单调减少的、凸的与下半连续的. 泛函$p_n(y)$在每一点的单调减少性

$$p_1(y)\geqslant p_2(y)\geqslant\cdots\geqslant p_n(y)\geqslant\cdots \tag{5.7}$$

可以由范数$\|x\|_n$满足不等式

$$\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_n\leqslant\cdots \tag{5.8}$$

推出：由(5.8)，集$\{x\mid \|x\|_n\leqslant 1\}\supset\{x\mid \|x\|_{n+1}\leqslant 1\}$ $(n=1,2,\cdots)$，因而

$$p_n(y)=\sup_{\|x\|_n\leqslant 1}|F(x,y)|\geqslant\sup_{\|x\|_{n+1}\leqslant 1}|F(x,y)|=p_{n+1}(y).$$

又，泛函$p_n(y)$也是凸的. 事实上，对于固定的x，泛函$|F(x,y)|$是凸的，因此泛函$p_n(y)$作为凸泛函的上确界也是凸的. 完全一样地可以证明泛函$p_n(y)$的下半连续性（定理1.5）.（x固定时，泛函$|F(x,y)|$是连续的，当然下半连续）. 由定理1.7知存在不依赖于y的实数m和M，使得$n>n_0$时，$p_n(y)\leqslant M\|y\|_m$. 再由$p_n(y)$的定义得

$$\sup_{\|x\|_n\leqslant 1}|F(x,y)|\leqslant M\|y\|_m. \tag{5.9}$$

因此(5.5)成立. □

现在考察把赋可列范空间X映到赋可列范空间Y的共轭空间Y^*内的算子．对于每一个这种算子G，可构造双线性泛函$F(x,y)$ $(x\in X,\ y\in Y)$如下：

$$F(x,y)\triangleq(Gx,y). \tag{5.10}$$

因为$Gx\in Y^*$，所以(Gx,y)有意义，因此由定理5.7可以得到关于上述形式算子的定理．为此我们假定算子G对于空间X的拓扑和空间Y^*的弱拓扑是连续的，即假设对于空间Y中任意有限个元素$y_1,y_2,\cdots,y_n$，必有空间X内零点的邻域U，使得$x\in U$①，而且$1\leqslant k\leqslant n$时$|(Gx,y_k)|\leqslant 1$．容易看出，双线性泛函$F(x,y)$对于每一个变元x及y连续．由定理5.7得，对于X内的所有元素x和Y内的所有元素y，有

$$|(Gx,y)|=|F(x,y)|\leqslant M\|x\|_n\|y\|_m$$

成立，这里M，m与n都是与x，y无关的数．注意到赋可列范空间Y的共轭空间Y^*内范数的定义，我们得到

$$\|Gx\|_{-m}\leqslant M\|x\|_n.$$

（用$\|f\|_{-m}$表示空间Y^*内由等式$\|f\|_{-m}\triangleq\sup\limits_{\|y_m\|\leqslant 1}|(f,y)|$定义的范数）因此，我们证明了

$$\sup_{\|x\|_n\leqslant 1}\|Gx\|_{-m}\leqslant M.$$

这说明算子G不仅对于空间X的拓扑和空间Y^*的弱拓扑连续，而且也对这两个空间内由范数$\|x\|_n$和$\|y\|_m$给出的拓扑连续．于是证明了下列定理：

定理 5.7′ 设X与Y都是赋可列范空间，G为线性算子，它把空间X映到空间Y的共轭空间Y^*内．设算子G对于空间X的拓扑和空间Y^*的弱拓扑连续，则它必对这两个空间X和Y^*上的范数$\|x\|_n$和$\|f\|_{-m}$连续．

注：定理5.7也可从定理5.7′推出．事实上，若$F(x,y)$是

---

① 在空间Y^*的弱拓扑下，零点的邻域由不等式$|(f,y_k)|\leqslant 1$，$1\leqslant k\leqslant n$给出，这里y_1，$\cdots$，y_n为空间Y内的有限个固定元．

空间X和Y上的双线性泛函,对于每一个变元x和y是连续的,则等式

$$(Gx,y)\triangleq F(x,y)$$

定义着算子G,它映空间X到Y^*内,而且对于空间X的拓扑及空间Y^*的弱拓扑是连续的,即可推出定理5.7.

值得注意的是双线性泛函$F(x,y)$也定义了G的共轭算子G^*,它是由等式$(G^*y,x)=F(x,y)$给出的.

现在我们证明当X与Y中有一个是核空间时,定理5.7也成立.

定理 5.8 (抽象的关于核的定理) 设X与Y都是可列希尔伯特空间,其中有一个(例如X)是核的,又$F(x,y)$是对于每一个变元x和y连续的双线性泛函,则存在自然数p和m,使得$F(x,y)$能表示成下列形式:

$$F(x,y)=(Gx,y)$$

这里G为映希尔伯特空间X_p到希尔伯特空间Y_m^*内的希尔伯特-施米特型算子(X_p是空间X按内积范数$\|x\|_p=\sqrt{(x,x)_p}$的完备化,而Y_m^*是Y_m的共轭空间),(Gx,y)表示泛函Gx在点y的值.

证: 因为双线性泛函$F(x,y)$对于每一个变元x,y连续,由定理5.7,存在范数$\|x\|_n$和$\|y\|_m$,使得

$$|F(x,y)|\leqslant M\|x\|_n\|y\|_m, \tag{5.11}$$

这里M与n,m无关. 定义空间X_n到Y_m^*内的算子G_1为:$(G_1x,y)=F(x,y)$. 由(5.11)推出

$$|(G_1x,y)|=|F(x,y)|\leqslant M\|x\|_n\|y\|_m.$$

因此又有

$$\|G_1x\|_{-m}=\sup_{\|y\|_m=1}|(G_1x,y)|\leqslant M\|x\|_n,$$

从而算子G_1关于空间X_n和Y_m^*上的范数$\|x\|_n$和范数$\|f\|_{-m}$是有界的.

依假设X是核空间，必有自然数p，使得映空间X_p到空间X^*的算子T_n^p（它使空间X中的元素不变）是希尔伯特-施米特型算子，于是映空间X_p到Y_m^*的算子$G=G_1T_n^p$也是同一类型算子. 由于算子T_n^p使空间X内的元素不变（确切地说，由于$T_n^p\overset{(p)}{x}=\overset{(n)}{x}$），所以双线性泛函$F(x,y)$可以写成下列形式：

$$F(x,y)=(G_1x,y)=(G_1T_n^px,y)=(Gx,y). \quad \square$$

注意，由定理3.1，映空间X_p到空间Y_m^*内的任意希尔伯特-施米特型算子G具有下列形式：

$$Gx=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x,x_k)_pf_k, \tag{5.12}$$

这里$\{x_k\}$和$\{y_k\}$依次是空间X_p和Y_m^*内的标准正交系，$\lambda_k\geqslant 0$，而且级数$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2$收敛，因此由定理5.8可得下列结果：

系 设X和Y都是可列希尔伯特空间，其中X还是核空间，则当双线性泛函$F(x,y)$（$x\in X, y\in Y$）对于每一个变元连续时，存在自然数m和p，使得$F(x,y)$具有下列形式：

$$F(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x,x_k)_pf_k(y), \tag{5.13}$$

这里$\{x_k\}$和$\{y_k\}$依次是空间X_p和Y_m^*内的标准正交系，$\lambda_k\geqslant 0$，而且级数$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2$收敛.

在某种情况下，将定理5.8作如下加强可能是有益的：算子G不仅是希尔伯特-施米特型的而且是核的. 与此相应，在系中用级数$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$的收敛性代替级数$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2$的收敛性，证明不必作改变，因为我们总可以要求算子$T_n^p$不仅是希尔伯特-施米特型的，而

且是核的.

关于核的定理也可以用别的形式叙述，为此我们引进下面记号. 设 x 和 y 依次是希尔伯特空间 H_1 和 H_2 内的元素，对应于元素 y，由公式 $(F_y, y_1)=(y_1, y)_2$ 作出空间 H_2 上的连续线性泛函 F_y，这里 $y_1\in H_2$，而 $(y_1, y)_2$ 是空间 H_2 内的内积. 用 $x\otimes y$ 表示映空间 H_1 到 H_2^* 内的线性算子：

$$(x\otimes y)_z=(z,x)_1F_y, \tag{5.14}$$

这里 $(z,x)_1$ 是 H_1 上的内积. 我们用 $(x\otimes y)^*$ 表示由下式定义的映空间 H_2^* 到 H_1 内的算子：

$$((x\otimes y)^*F,z)_1=(F,(x\otimes y)z)_{-2}, \tag{5.15}$$

这里 $F\in H_2^*$，$z\in H_1$，而 $(F_1,F_2)_{-2}$ 表示 H_2^* 中的内积. 算子 $(x\otimes y)^*$ 也可以由公式

$$((x\otimes y)^*F,z)_1=(F,(z,x)_1F_y)_{-2} \tag{5.16}$$

定义.

显然，算子 $x\otimes y$ 和 $(x\otimes y)^*$ 是退化的(其值域只有一维)，因而是希尔伯特-施米特型的. 所以，当 G 是映空间 H_1 到 H_2^* 的希尔伯特-施米特型算子时，算子 $(x\otimes y)^*G$ 是核的，因而此算子的迹 $\mathrm{Tr}[(x\otimes y)^*G]$ 存在. 令

$$F(x,y)=\mathrm{Tr}[(x\otimes y)^*G], \tag{5.17}$$

得到空间 H_1 和 H_2 上的双线性泛函，我们称希尔伯特-施米特型算子 G 是这个双线性泛函的**核**.

注：若 H_1 和 H_2 都是平方可积的函数空间，则算子 $x\otimes y$ 由下列公式

$$(x\otimes y)z=\overline{y(s)}\int z(t)\overline{x(t)}\,\mathrm{d}t$$

确定，即以 $\overline{x(s)y(s)}$ 为核的退化积分算子，这时双线性泛函 $F(x, y)$ 具有下列形式：

$$F(x,y)=\int G(s,t)x(s)y(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{5.18}$$

这里函数 $G(s,t)$是具有平方可积模的，它是泛函 $F(x,y)$的核.

现在证明，在核空间内任何双线性泛函都是由核算子给出的。

定理 5.9（抽象的关于核的定理的另一种叙述） 设X和Y都是可列的希尔伯特空间，其中X也是核空间. 如果双线性泛函$F(x,y)$ $(x\in X,\ y\in Y)$对于每一个变元x和y连续，则必有自然数p和m以及映空间X_p到Y_m^*的希尔伯特-施米特型算子G，使得

$$F(x,y)=\mathrm{Tr}[(x\otimes y)^*G], \tag{5.19}$$

这里$(x\otimes y)^*$表示将Y_m^*映到X_p内的算子，它由下列公式

$$((x\otimes y)^*F,z)_p=(F,(z,x)_pF_y)_{-m} \tag{5.20}$$

定义$(F\in Y_m^*, z\in X_p,\ (x,\ y)_p$是$X_p$中的内积$)$，$(F,F_y)_{-m}$是$Y_m^*$中的内积，而$F_y$是由公式

$$(F_y,y_1)=(y_1,y)_m$$

确定的Y_m上的线性泛函.

证： 由定理 5.7. 必有自然数m和p，使得

$$F(x,y)=(Gx,y),$$

这里G为希尔伯特-施米特型算子，而且将空间X_p映到Y_m^*内.我们要证明(5.19).为此在空间X_p中取标准正交系$\{x_k\}$，使得$x_1=x/\|x\|$（注： $x=0$时定理显然成立）. 将算子$x\otimes y$简记为T，显然

$$\mathrm{Tr}(T^*G)=\sum_{k=1}^{\infty}(T^*Gx_k,x_k)_p$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(Gx_k,Tx_k)_{-m}. \tag{5.21}$$

然而，$k\neq 1$时

$$Tx_k=(x\otimes y)x_k=(x_k,x)F_y$$

$$=\|x\|(x_k,x_1)F_y=0, \tag{5.22}$$

而且 $Tx_1 = \|x\| F_y$，因此

$$\mathrm{Tr}(T^*G) = (Gx_1, \|x\| F_y)_{-m} = (Gx, F_y)_{-m}.$$

由于泛函 F_y 是由等式 $(F_y, y_1) = (y_1, y)_m$ 定义的，所以对于 Y_m^* 内的任意元素 F，成立等式

$$(F, F_y)_{-m} = (F, y).$$

因而
$$F(x,y) = (Gx, y) = (Gx, F_y)_{-m} = \mathrm{Tr}(T^*G) = \mathrm{Tr}[(x \otimes y)^* G]. \quad \Box$$

下面我们再证明一个与定理 5.7 密切相关的定理.

定理 5.10 设 G 是将核空间 X 映到可列希尔伯特空间 Y 的共轭空间 Y^* 内的线性算子. 若算子 G 关于空间 X 的拓扑和空间 Y^* 的弱拓扑是连续的，则必存在自然数 p 和 m，使得算子 G 对于空间 X 和 Y^* 上的范数 $\|x\|_p$ 和 $\|f\|_{-m}$ 而言是希尔伯特-施米特型算子.

证：由定理 5.7′，存在自然数 n 和 m，使得算子 G 对于范数 $\|x\|_n$ 和 $\|f\|_{-m}$ 是连续的. 换句话说，算子 G 在空间 X_n 上所诱导的算子 G_n 将这个空间连续地映到 Y_m^* 内. 然而，由于 X 的核性，必有自然数 p，使得空间 X_p 到 X_n 内的映射 T_n^p 是希尔伯特-施米特型的. 显然 $G_p = G_n T_n^p$，这里 G_p 是算子 G 在空间 X_p 上诱导出的算子. 因为 G_p 是希尔伯特-施米特型算子 T_n^p 与连续线性算子 G_n 的积，所以 G_p 也是此类型算子. $\Box$

同理可以证明它的对偶定理.

定理 5.11 设 G 是可列希尔伯特空间 X 到核空间 Y 的共轭空间 Y^* 内的连续线性映射（在空间 Y^* 上取弱拓扑），则存在自然数 p 和 m，使得算子 G 对于空间 X 和 Y^* 内的范数 $\|x\|_m$ 和 $\|f\|_{-p}$ 是希尔伯特-施米特型算子.

6. 空间 $K\{M_p\}$ 的核性

我们已经建立了核空间的各种性质，自然发生这样的问题：对哪种具体的空间能应用我们的结果？怎样的具体空间具有核性？下

面我们证明空间 $K\{M_p\}$就是这样一类空间. 为了简单起见，我们只对一元函数来考虑.多元函数的情形，仅仅是写起来复杂，所有的结果仍然正确.

定理 5.12 若空间 $K\{M_p\}$ 满足下列条件：对于任何自然数 n，必有自然数 $p>n$，使得商式

$$m_{n_p}(x)=\frac{M_n(x)}{M_p(x)}$$

当 $|x|\to\infty$ 时趋于零，而且又是 x 的有界可积函数（在 $M_n(x)=M_p(x)=\infty$的那些点，置 $m_{n_p}(x)=0$），则它是核空间.

证：首先证明空间 $K\{M_p\}$ 是可列希尔伯特空间. 为此，在 $K\{M_p\}$内引入内积如下：$\forall\varphi,\psi\in K\{M_p\}$，

$$(\varphi,\psi)_p\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}(M_p(x))^2\sum_{0\leqslant q\leqslant p}\varphi^{(q)}(x)\overline{\psi^{(q)}(x)}\,\mathrm{d}x.\tag{5.23}$$

下面证明，在 $K\{M_p\}$内由范数

$$\|\varphi\|_p=\sup_{0\leqslant k\leqslant p}\sup_x|M_p(x)\varphi^{(k)}(x)|\tag{5.24}$$

给出的拓扑与由范数 $\|\varphi\|'_p=\sqrt{(\varphi,\varphi)_p}$ 给出的拓扑一致. 事实上，当 $q\leqslant n<p$ 时得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[M_n(x)]^2|\varphi^{(q)}(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sup_x\{[M_p(x)]^2|\varphi^{(q)}(x)|^2\}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{M_n(x)}{M_p(x)}\right]^2\mathrm{d}x.$$

依条件可以取 p，使得积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{M_n(x)}{M_p(x)}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}m_{n_p}(x)\mathrm{d}x$$

收敛. 因为 $\lim\limits_{|x|\to\infty}m_{n_p}(x)=0$，而且 $m_{n_p}(x)$有界，所以积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[m_{n_p}(x)]^2\mathrm{d}x$$

也收敛．将这个值记为 B_{np}^2，于是得知，当 $q\leqslant n<p$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[M_n(x)]^2|\varphi^{(q)}(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant B_{np}^2\|\varphi\|_p^2.$$

由此推出

$$\|\varphi\|_n'^2=\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}[M_n(x)]^2|\varphi^{(q)}(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant C^2\|\varphi\|_p^2,$$

即 $\|\varphi\|_n'^2\leqslant C^2\|\varphi\|_p^2$，这里 C 是与 $\varphi(x)$ 无关的常数．

现在用 $\|\varphi\|_p'$ 来估计 $\|\varphi\|_n$．设 q_0 是使表达式 $|M_n(x)\varphi^{(q)}(x)|$ $(q\leqslant n)$ 达到上确界的值，将 $\sup\limits_x M_n(x)$ 记为 A_n，则

$$\|\varphi\|_n=A_n\sup|\varphi^{(q_0)}(x)|\leqslant A_n\left[\sup\int_{-\infty}^{x}|\varphi^{(q_0+1)}(x)|\mathrm{d}x\right].$$

因为 $M_{q_0+1}(x)\geqslant 1$，所以

$$\|\varphi\|_n\leqslant A_n\int_{-\infty}^{+\infty}M_{q_0+1}(x)|\varphi^{(q_0+1)}(x)|\mathrm{d}x.$$

利用布尼雅可夫斯基（Буняковский）-施瓦兹不等式，由上推出

$$\|\varphi\|_n^2\leqslant A_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{M_{q_0+1}(x)}{M_p(x)}\right]^2\mathrm{d}x$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}[M_p(x)]^2|\varphi^{(q_0+1)}(x)|^2\mathrm{d}x.$$

然而有数 p，使积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{M_{q_0+1}(x)}{M_p(x)}\mathrm{d}x$$

收敛，因而积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{M_{q_0+1}(x)}{M_p(x)}\mathrm{d}x$$

也收敛，记其值为 E_p^2．我们得到 $\|\varphi\|_n\leqslant A_nE_p\|\varphi\|_p'$．由此及已经证明的不等式 $\|\varphi\|_n'\leqslant C\|\varphi\|_p$ 推出，范数族 $\{\|\varphi\|_p'\}$ 与范数族 $\{\|\varphi\|_n\}$ 给出空间 $K\{M_p\}$ 上的同一个拓扑．于是，在定理条件下，$K\{M_p\}$ 是可列希尔伯特空间．

现在证明 $K\{M_p\}$ 是核空间．利用定理 5.4．只要证明在空间

$K\{M_p\}$上任何无条件收敛的连续线性泛函级数 $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ 是绝对收敛的. 这里自然可以利用空间 $K\{M_p\}$ 上给出此空间拓扑的任何一组范数. 由第二章的定理 9.2, 每一个关于范数$\|\varphi\|_n$有界的线性泛函 F_k 可以写成

$$(F_k,\varphi)=\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}M_n(x)F_{kq}(x)\varphi^{(q)}(x)\mathrm{d}x. \qquad (5.25)$$

这里对于每一个 q, $F_{kq}(x)$ 是 x 的本性有界可测函数. 这时空间 $K\{M_p\}$上连续线性泛函 F_k 的范数有公式

$$\|F_k\|'_{-n}=\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\sup_x|F_{kq}(x)|.$$

这里在计算上确界时,我们将略去一个零测度集.

根据定理 5.3 的引理, 对于无条件收敛的连续线性泛函级数 $\sum_{k=1}^{\infty}F_k$,可以取实数 A 和自然数 n ,使得不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(F_k,\varphi)|\leqslant A\|\varphi\|_n$$

对于空间 $K\{M_p\}$内的一切元素成立. 由此推出, 一切连续线性泛函 F_k 都是对于范数$\|\varphi\|_n$ 连续的,也都可以写成形式 (5.25). 这样一来,对于空间 $K\{M_p\}$内的任何元素 φ,不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}M_n(x)F_{kq}(x)\varphi^{(q)}(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant A\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\sup_x|M_n(x)\varphi^{(q)}(x)|$$

成立.

利用哈恩-巴拿赫的线性泛函延拓定理,容易得到类似的不等

式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}M_n(x)F_{kq}(x)\varphi_q(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant A\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\sup_x|M_n(x)\varphi_q(x)|$$

对于使积分$\int_{-\infty}^{+\infty}M_n(x)\varphi_q(x)\mathrm{d}x$收敛的任何函数$\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)$成立．由于这组函数的任意性，必存在常数$C$，使不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{0\leqslant q\leqslant n}|F_{kq}(x)|<C \tag{5.26}$$

对所有x的值成立．

现在取自然数$p\geqslant n$，使得积分$\int_{-\infty}^{+\infty}m_{np}(x)\mathrm{d}x$收敛．我们要证明级数$\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k\|_{-p}$收敛．事实上，

$$|(F_k,\varphi)|\leqslant\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}M_n(x)|F_{kq}(x)\varphi^{(q)}(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sup_{0\leqslant q\leqslant n}\sup_x M_p(x)|\varphi^{(q)}(x)|\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{M_n(x)|F_{kq}(x)|}{M_p(x)}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\|\varphi\|_p\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}m_{np}(x)|F_{kq}(x)|\mathrm{d}x$$

显然成立．

因而有
$$\|F_k\|_{-p}\leqslant\sum_{0\leqslant q\leqslant n}\int_{-\infty}^{+\infty}m_{np}(x)|F_{kq}(x)|\mathrm{d}x.$$

然而由不等式(5.26)和函数$m_{np}(x)$的可积性得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k\|_{-p}\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}m_{np}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{0\leqslant q\leqslant n}|F_{kq}(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}m_{np}(x)\mathrm{d}x\leqslant C_1,$$

于是级数$\sum_{k=1}^{\infty}F_k$绝对收敛．这就表示空间$K\{M_p\}$是核的． □

满足定理 5.12 的条件的$K\{M_p\}$空间类是足够广泛了．属于这种类型的空间，例如有空间$K(a)$．对于这种空间取$M_p(x)$如下：当$|x|\leqslant a$时$M_p(x)=1$，而$|x|\geqslant a$时$M_p(x)=\infty$．又空间S也适合这些条件，这时$M_p(x)=(1+x^2)^p$．至于其他空间，这里从略．

7．核性概念的推广

首先，自然想到核性概念可以推广到赋可列范空间．就是说，若X是赋可列范空间，而且对于任何自然数m，存在自然数n，使得空间X_n到空间X_m内的算子T_m^n是核的，即具有形式

$$T_m^n x=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f_k,x)y_k. \tag{5.27}$$

这里$\{f_k\}$和$\{y_k\}$依次为空间X_n^*及X_m内的有界元素序列，$\lambda_k\geqslant0$，而且级数$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$收敛．①

然而这样的推广并没有扩大我们所考察的空间类，因为在任何赋可列范核空间内，总可以引进可列个内积，使它成为与原来空间同构的可列希尔伯特核空间．

这些内积可以如下地作出：对于任意自然数m，选取自然数n，使得映射T_m^n是核的，即T_m^n形如（5.27），则对于空间X内任

① 也可以改写成$T_m^n x=\sum_{k=1}^{\infty}(f_k,x)y_k$，而级数$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{-n}\|y_k\|_m$收敛．

意二元素 x 和 y，规定它们的内积为

$$(x,y)_{mn}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f_k,x)\overline{(f_k,y)}.$$

显然，对于空间 X 中的任意二元素 x 和 y，上述级数收敛，这是因为它含于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\|f_k\|^2_{n}\|x\|_n\|y\|_n$$

之中，而按照条件，泛函序列组成空间 X_n^* 内的有界集，而且级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ 收敛.

我们证明内积 $(x,y)_{mn}$ 适合不等式

$$\|x\|_m^2\leqslant C_1(x,x)_{mn}\quad 和\quad (x,x)_{mn}\leqslant C_2\|x\|_n^2,$$

这里 C_1 和 C_2 都是不依赖于 x 和 y 的正实数. 事实上，由于元素集 $\{y_k\}$ 在空间 X_m 内有界，所以不等式

$$\|x\|_m^2\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_k,x)|\,\|y_k\|_m\right\}^2$$

$$\leqslant C^2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_k,x)|\right\}^2$$

成立，这里 $C=\sup\limits_k\|y_k\|_m$. 再由布尼雅可夫斯基-施瓦兹不等式得

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_k,x)|\right]^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_k,x)|^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k.$$

然而
$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_k,x)|^2=(x,x)_{mn},$$

因此有
$$\|x\|_m^2\leqslant C_1(x,x)_{mn},$$

这里 $$C_1 = C^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

另一方面,有不等式

$$(x, x)_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(f_k, x)|^2$$

$$\leqslant \| x \|_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \| f_k \|_{-n}^2 \leqslant C_2 \| x \|_n^2,$$

这里 $C_2 = \sup_k \| f_k \|_{-n}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$. 这就证明了我们所需要的关系. 由于 m 是任意的,于是由这些关系推出,这组内积 $(x, y)_{mn}$ 在空间 X 中给出的拓扑就是范数组 $\| x \|_n$ 给出的拓扑, 因而 X 是可列希尔伯特空间.

我们还要证明这个空间是核空间. 为此我们考察使 T_m^n 为核算子的任意两个指标 m 及 n, 必有指标 $p > n$ 及 $r > p$, 使得映射 T_n^p 及 T_p^r 是核算子. 空间 X 按内积 $(x, y)_{mn}$ 完备化后所得的空间记为 X_{mn}, 而按内积 $(x, y)_{pr}$ 完备化后所得的空间记为 X_{pr}, 而且用 T_{mn}^{pr} 表示从空间 X_{pr} 到空间 X_{mn} 的映射, 则这个映射是核的. 事实上, 映射 T_{mn}^{pr} 是下列乘积:

$$T_{mn}^{pr} = R T_n^p Q,$$

这里 Q 是空间 X_{pr} 到空间 X_p 内的映射, T_n^p 是空间 X_p 到空间 X_n 内的映射, 而 R 是空间 X_n 到空间 X_{mn} 内的映射. 然而, 映射 Q 和 R 是连续的, 这是由于不等式

$$\| x \|_p^2 \leqslant B_1 (x, x)_{pr} \quad 及 \quad (x, x)_{mn} \leqslant B_2 \| x \|_n^2.$$

又由条件, 映射 T_n^p 是核算子, 因此 T_{mn}^{pr} 作为核算子与连续算子之积仍是核的. 事实上, 一般说来, 若 $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f_k, x) y_k$ 为巴拿

赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 内的核算子，而 A 是巴拿赫空间 Y 到巴拿赫空间 Z 内的连续算子，则算子 AT 可以表示成

$$ATx=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f_k, x)Ay_k,$$

其中由于算子 A 的连续性，空间 Z 内的集 $\{Ay_k\}$ 是有界的，因此 AT 是核算子．同理可证算子 TA 的核性，这里 A 是空间 Z 到空间 X 内的连续算子，而 T 是空间 X 到空间 Y 内的核算子．于是仿上有

$$TAz=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f_k, Az)y_k=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(A^*f_k, z)y_k.$$

由算子 A^* 的连续性，集 $\{A^*f_k\}$ 是有界的．

8．局部凸核空间

可列希尔伯特核空间概念的重要推广是局部凸核空间概念，为此先推广核算子概念．仿第 7 段，若 X 是 T_2 型局部凸空间，Y 是巴拿赫空间，假定存在 X 上的连续线性泛函的等度连续序列 $\{f_k\}$（即存在 X 上的连续半范数 q，使得 $\sup_k|(f_k, x)|\leqslant q(x)$ 对于一切 $x\in X$ 成立），空间 Y 内的有界序列 $\{y_k\}$ 以及满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty}C_k<\infty$ 的非负数列 $\{C_k\}$，则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k(f_k, x)y_k \tag{5.28}$$

强收敛．事实上，由于 $\{f_k\}$ 的等度连续性，存在空间 X 上的一个连续半范数 q，使得对于一切 $x\in X$ 有 $\sup_k|(f_k, x)|\leqslant q(x)$ 成立，因此有不等式

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}C_k(f_k, x)y_k\right\|\leqslant q(x)\sup_k\|y_k\|\sum_{k=1}^{\infty}C_k$$

成立．这就证明了(5.28)对于每一个 $x\in X$ 有意义，从而它定义了

一个把空间 X 映到空间 Y 内的连续性算子. 我们称这个算子为把空间 X 映到巴拿赫空间 Y 内的**核算子**.

这里的核算子概念显然是 §4 定义的核算子概念的推广.

若 X 是局部凸空间, V 是 X 内零点的一个凸均衡邻域, 令

$$p_V(x)=\inf\{\lambda \mid x\in\lambda V,\lambda>0\},$$

即 $p_V(x)$ 是 V 的闵可夫斯基泛函, 则 p_V 是 X 上的一个连续半范数. 令

$$N_V=\{x|x\in X, p_V(x)=0\}=\{x|x\in X,\lambda x\in V,\lambda>0\},$$

则 N_V 是空间 X 的一个闭线性子空间, 而且商空间 $X_V\triangleq X/N_V$ 是一个赋范线性空间, 其范数为 $\|\tilde{x}\|_V\triangleq p_V(x)$. 这里 $\tilde{x}$ 是含元素 x 的关于模 N_V 的剩余类. 事实上, 设 $x-x_1\in N_V$, 则

$$p_V(x_1)\leqslant p_V(x)+p_V(x_1-x)=p_V(x).$$

同理 $p_V(x)\leqslant p_V(x_1)$. 因此, 若 x 和 x_1 都在模 N_V 的同一个剩余类中, 便有 $p_V(x)=p_V(x_1)$. 又显然有 $\|\tilde{x}\|_V\geqslant 0$ 和 $\|0\|_V=0$. 如果 $\|\tilde{x}\|_V=0$, 则由 $x\in\tilde{x}$, 必有 $x\in N_V$, 从而有 $\tilde{x}=0$. 三角形不等式为

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_V=p_V(x+y)\leqslant p_V(x)+p_V(y)=\|\tilde{x}\|_V+\|\tilde{y}\|_V.$$

另外, 还有

$$\|a\tilde{x}\|_V=p_V(ax)=|a|p_V(x)=|a|\ \|\tilde{x}\|_V.$$

利用等价性

$$(p_{V_1}\leqslant p_{V_2})\Longleftrightarrow(V_2\subset V_1),$$

我们可以定义一个典型映射:

$$x_{V_2}\mapsto x_{V_1}\quad(\text{当 } V_2\subset V_1).$$

其办法是将包含 x (关于模 N_{V_2}) 的剩余类 $\tilde{x}_{V_2}$ 与包含 x (关于模 N_{V_1}) 的剩余类 $\tilde{x}_{V_1}$ 联系起来, 这样得到的映射是连续的, 因为

$$\|\tilde{x}_{V_1}\|_{V_1}=p_{V_1}(x)\leqslant p_{V_2}(x)=\|\tilde{x}_{V_2}\|_{V_2}.$$

有了上边的准备工作之后, 我们就可给出局部凸核空间概念.

定义 5.4(哥劳吞狄克(Grothendieck)) 设 X 是 T_2 型局部凸拓扑线性空间. 如果对于零点的任意凸均衡邻域 V, 存在零点的

另一个凸均衡邻域 $U\subset V$，使得典范映射 T： $X_U\longrightarrow \hat{X}_V$ 是核映射，则称 X 为**局部凸核空间**，这里 $\hat{X}_V$ 是赋范线性空间 X_V 的完备化.

可以证明，可列希尔伯特核空间正是局部凸核空间的特例.

局部凸核空间有许多充要条件. 例如，下边任何一个都是充要条件：

(1) 对于零点的任一凸均衡邻域 V，典范映射 T： $X\longrightarrow X_V$ 是核的.

(2) 对于空间 X 上的任一个连续半范数 p，存在 X 上的另一个连续半范数 $q\geqslant p$，使得 $\hat{X}_p$ 到 $\hat{X}_q$ 内的典范映射是核的.

(3) 空间 X 到一个巴拿赫空间 Y 内的每一个连续线性映射是核的.

(4) 从一个巴拿赫空间到 X^* 内的每一个映单位球到等度连续集内的线性映射是核的.

由这些等价条件或定义可直接导出核空间的一系列性质，例如：

(1) 局部凸空间 X 是核的充要条件是：它的完备化空间 $\hat{X}$ 是核的.

(2) 核空间的线性子空间是核的.

(3) 核空间关于一个闭线性子空间为模的商空间是核的.

(4) 核空间族的乘积是核的.

(5) 核空间序列的归纳极限是核的.

其证明可参看后面参考文献 22 或 51.

核空间的详细讨论和应用可参看后面参考文献 37 与 51.

符 号 说 明

N	自然数集
R	实数域或一维实欧氏空间
C	复数域或一维复欧氏空间
N^n	n 元有序自然数组的全体
R^n	n 维实欧氏空间
$C^m(0\leqslant m\leqslant\infty)$	在 R^n 内m次连续可微的复值函数类(若$m=\infty$,则各阶小于∞; $m=0$ 时为连续函数类)
K	R 或 C或基本空间
$x=(x_1,\cdots,x_n)$	R^n内的变点
$z=(z_1,\cdots,z_n)$	C^n内的变点
$x+iy$	$(x_1,\cdots,x_n)+i(y_1,\cdots,y_n)=z$
z_j	x_j+iy_j
$\lvert x\rvert$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{1/2}$
$\lvert z\rvert$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\lvert z_j\rvert^2\right)^{1/2}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\right)^{1/2}$
$x+y$	$(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$
kx	$(kx_1,\cdots,kx_n),k\in K$
$x\cdot y$	$x_1y_1+\cdots+x_ny_n$
dx	$dx_1\cdots dx_n$
$\lvert\alpha\rvert$	若$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,则$\lvert\alpha\rvert=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$
D^α或$D^{\lvert\alpha\rvert}$	若$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,则$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$
D_j	$\dfrac{d}{dx_j}$, $j\in N$
x^α	$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$
$\alpha!$	$\alpha_1!\cdots\alpha_n!$
$\binom{\alpha}{\beta}$	$\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$,这里 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

$\alpha \geqslant \beta$ $\alpha_j \geqslant \beta_j (j=1, \cdots, n)$

$\frac{\alpha}{\beta}$ $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$\exp(a|bz|^k)$ $\exp(a_1|b_1 z_1|^{k_1} + \cdots + a_n|b_n z_n|^{k_n})$，这里 $a=(a_1, \cdots, a_n)$，$b=(b_1, \cdots, b_n)$，且$k=(k_1, \cdots, k_n)$，$z=(z_1, \cdots, z_n)$.
若a，b或k是数量，则仍用$a_1=a_2=\cdots=a_n=a$，$b_1=b_2=\cdots=b_n=b$ 或$k_1=k_2=\cdots=k_n=k$

C_0^m C^m 内具紧支集的函数类

(D^k) C_0^k 赋予拓扑后得到的基本空间

$f: X \to Y$ 从X到Y内的映射

f^{-1} 映射f的逆

$f(A)$ 集A在映射f下的像

$f^{-1}(B)$ 集B在映射f下的原像

$|f(B)|$ $\sup\limits_{x \in B}|f(x)|$

$F(f)$或$\hat{f}$ 函数f或广义函数f的傅里叶变换

$F^{-1}(f)$ 函数f或广义函数f的逆傅里叶变换

X^*或X' 空间X的共轭空间

A^*或A' 线性算子A的共轭算子

$L(X, Y)$ 从X到Y内的一切线性算子的集

$B(X, Y)$ 从X到Y内的一切有界线性算子的集

$\varphi_m \to \varphi(\Phi)$ 空间Φ内序列$\{\varphi_m\}$依Φ的收敛性以Φ内的元素φ为极限

$\otimes$ 直积

$*$ 卷积

$\mathscr{U}_0$ 拓扑空间中零元素的邻域基

$\mathscr{B}_x$ 拓扑空间中元素x的邻域系或邻域基

Π 笛卡儿乘积

名 词 索 引

（以下按笔画排列）

一～四画

五 画

六 画

七　画

八　画

九　画

十　画

十一画

十二画

十三画以上

外国人名中译对照表

参考文献

1 关肇直．拓扑空间概论．北京：科学出版社，1958

2 关肇直．泛函分析讲义．北京：高等教育出版社，1958

3 关肇直等．线性泛函分析入门．上海：上海科学技术出版社，1979

4 夏道行等．实变函数论与泛函分析．北京：人民教育出版社，1980

5 定光桂．巴拿赫空间引论．北京：科学出版社，1984

6 冯康．广义函数论．数学进展．1955(3)：407～590

7 李邦河．非标准分析与广义函数的乘法(Ⅰ)．中国科学．1978(1)：1～10

8 李邦河．非标准分析与广义函数的乘法(Ⅱ)．中国科学．1979(2)：139～149

9 李邦河．On distributions with parameter and their analytic representations. Chin. Ann. of Math. 1981(4)：399～405

10 李邦河，李雅卿．论广义函数的乘法．吉林大学自然科学学报．1981(1)：13～30

11 李邦河，李雅卿．广义函数的解析与调和表示．中国科学A．1985(2)：111～122

12 李邦河，李雅卿．非标准分析和任意维数的广义函数的乘法．中国科学A．1985(4)：320～330

13 李邦河，李雅卿．广义函数的集值导数．中国科学A．1992(3)：225～234

14 程麟趾，李程宽．广义函数的卷积．应用数学．1992(4)：103～105

15 陈庆益．广函的定义与乘法．兰州大学学报(自然科学版)．1962(2)：1～6

16 陈庆益．流形分布与拟微分算子．武汉：华中工学院出版社．198

17 刘浩岳．广义函数论的诞生与发展．新乡师范学院学报(自然科学版)．1983(3)：80～86

18 刘浩岳．发散积分的有限部分与广义函数．河南师范大学学报(自然科学版)．1980(1)：128～136

19 刘浩岳．PF space．全国第一届广义函数及其应用会议交流．青岛，1985年7月
20 刘浩岳，王清杰，寇怀忠．拓扑向量空间上的一个新拓扑结构．河南师范大学学报(自然科学版)．1987(4)：8～12
21 刘浩岳，王清杰．$\sigma(E_1)$拓扑的性质和应用．河南师范大学学报(自然科学版)．1990(10)：1～4
22 吉田耕作．泛函分析．吴元恺等译．北京：人民教育出版社，1981
23 吉田耕作．泛函分析五十年．数学译林．1984(3)：210～222
24 刘浩岳．连续映射空间的拓扑．河南数学．1982(2)：6～12
25 岩村联．广义函数．杨永芳译．上海：上海科学技术出版社．1961
26 Barros-Neto．广义函数引论．欧阳光中，朱学炎译．上海：上海科学技术出版社，1981
27 Bohnenblust, H. F. and Sobczyk, A. Extensions of functionnals on complex linear spaces. Bull. Amer. Math..Soc. Vol.44. 1938：91～93
28 Colonbeau, J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. New York: the Netherlands, 1994
29 Colonbeau. Elementary introduction to new generalized functions. New York: North-Holland, 1957
30 Delange, R. and Sommen, F. Hypercomplex fuctions theory and representation of distributions in functional analysis. Proc. Paderborn Conference on Functional Analysis. New York: North-Holland, 1980: 167～182
31 Dieudonne, J. A. History of fuctional analysis. New York: North-Holland, 1981
32 Dierolf, P. Multiplication and convolution operators between spaces of distributions in functional Analysis. Proc. Paderborn Conference on Functional Analysis. New York: North-Holland, 1984
33 Friedmann, A. Generalized functions and partial diffe-

rential equations. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, INC. 1963

34 Гельфанд, И. М. и Шилов, Г. Е. Обобщенные функций, Вып. 1, Обобщенные функции и действияс над ними, Издание второе, осударственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959

35 Гельфанд, И. М. и Шилов, Г. Е. Обобщенные функций, Вып. 2, Пространстеа основных и обобщенных функций, Государственное издательство Физико-Математической литературы, Москва, 1958

36 Гельфанд, и. м. и Шилов, Г. Е. Обобщенные функции, Вып. 3, Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Государственное издательство Физико-Математической литературы, Москва, 1958

37 Гельфанд, И. М. и Виленкин, Н. Я. 夏道行译, 广义函数, 卷 4, 调和分析的某些应用, 装备希尔伯特空间. 北京: 科学出版社, 1965

38 Garsoux, J. Espaces vectoriels topologiques et distributions. Paris: Dunod, 1963

39 Hörmander, Lars. The analysis of linear partial differential operators I, Distributions theory and fourier analysis. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1983

40 Jones, D. S. The theory of generalized functions. (2nd ed.) London: Cambridge University Press, 1982

41 Kelley, J. L. and Namioka, I. and co-authors. Linear topological spaces. New York, Van Nostrand, 1962

42 Köthe, G. Topological vector spaces I. Translated by Garling, D. J. H. Berlin, Heldelberg, New York: Springer-Verlag, 1983

43 Kanwal, Ram P. Generalized functions theory and te-

chnique. New York: Academic Press, 1983

44 Lützen, J. The prehistory of the theory of distributions. New York: Springer-Verlag, 1982

45 Mikusinski, J. and Sikorski, R. The elementary theory of distributions. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1957

46 Rosinger, E.F.. Distributions and nonlinear partial differential equations. Berlin: Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978

47 Schwartz, L. Théorie des distributions, (2nd ed.)Vol. I. Paris: Hermann, 1957

48 Schwartz, L. Théorie des distibutions. Vol. Ⅱ. Paris: Hermann, 1959

49 Schwartz, L. Sur l'impossibilitéi de la multiplication des distributions, C. R. Acad. Sc. Paris, 1954

50 Schwartz, J and Dunford, N.. Linear operators, Vol. I. General theory. New York: Interscience, 1958

51 Treves, F. Topological vector spaces, distributions and kernels. New York: Academic Press, 1967

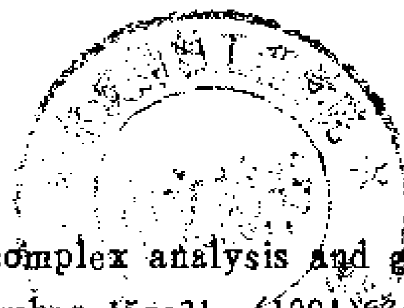
52 Weidmann, J. Linear operators in Hilbert spaces, translated by Joseph Szucs. Berlin: Heidelberg. New York: Springer-Verlag, 1980

53 Zemanain, A.H. Distribution theory and transform analysis. New York: Mcgraw-Hill, 1965

54 William, F., Donoghue, JR. Distributions and fourier transforms. New York, San Francisco.London: Academic Press, 1969

55 Kou Huaizhong and Brian Fisher. On compositions of distributions. Publ. Math. Debrecen 49/3—4 (1992), 279 ~290

56 Fisher, B. and Kou Huaizhong, Ozcag, E. The compo-



sition of distributions complex analysis and generalized functions, Varna, September 15～21, (1991) 63～72

57 Gopi Ahuja. A note on the product of distributiont, J. Maulana Azad College Tech. 25 (1992) 1～4

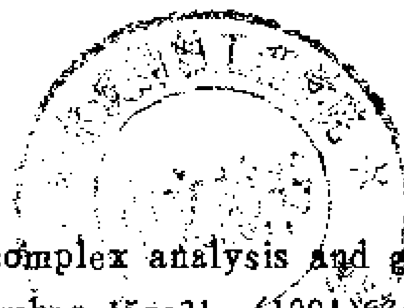
58 Gopi Ahuja. On the product of an arbitrary function and the fractional derivate of dirac delta distribution. J. Indian Math. Soc. 58 (1992), no. 1～4, 231—236

69 Juan G. Representation of distributions by nonstandard functions. Bol. Mat. 23(1992)no. 1～2, 64—68

69 Hayek, N., Pérez-Acosta, F. Asymptotic expressions of the dirac delta function in terms of the Bessel-Clifford functions, Pure Appl. Math. Sci. 37 (1993) no. 1～2, 53～56

61 Komatsu, Hikosaburo. An elementary theory of hyperfunctions and microfunctions. Partial differential equations, Part 1, 2 (Warsaw) (1990) 233—256, Banach Center Publ., 27, Part 1, 2, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1992

62 Li Banghe and Li Yaching. New generalized functions in nonstandard framework, Acta Math. Sci. (English Ed) 12 (1992) no. 3, 260—269



sition of distributions complex analysis and generalized functions, Varna, September 15～21, (1991) 63～72

57 Gopi Ahuja. A note on the product of distributiont, J. Maulana Azad College Tech. 25 (1992) 1～4

58 Gopi Ahuja. On the product of an arbitrary function and the fractional derivate of dirac delta distribution. J. Indian Math. Soc. 58 (1992), no. 1～4, 231—236

69 Juan G. Representation of distributions by nonstandard functions. Bol. Mat. 23(1992)no. 1～2, 64—68

69 Hayek. N., Pérez-Acosta, F. Asymptotic expressions of the dirac delta function in terms of the Bessel-Clifford functions, Pure Appl. Math. Sci. 37 (1993) no. 1～2, 53～56

61 Komatsu, Hikosaburo. An elementary theory of hyperfunctions and microfunctions. Partial differential equations, Part 1, 2 (Warsaw) (1990) 233—256, Banach Center Publ., 27, Part 1, 2, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1992

62 Li Banghe and Li Yaching. New generalized functions in nonstandard framework, Acta Math. Sci. (English Ed) 12 (1992) no. 3, 260—269